UNA DUALIDAD TIPO GELFAND-PRIESTLEY

LUZ KARIME TOSSE URBANO

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Santiago de Cali

2017

UNA DUALIDAD TIPO GELFAND-PRIESTLEY

LUZ KARIME TOSSE URBANO

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Ciencias

Matemáticas
otorgado por la Universidad del Valle

Dr. GUILLERMO ORTIZ RICO
Director

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali
2017

Por lo que he recibido
Este trabajo es dedicado a Dios.

Agradecimientos

- Profesor Guillermo Ortiz por su dedicación y tiempo.
- Alex, Vicky, Johana y Jéssica por su ayuda oportuna.
- Mi prima Dane, por brindarme un calor de hogar al llegar a esta ciudad.

Luz Karime Tosse U.

Universidad del Valle
Diciembre de 2017

Tabla de Contenido

Resumen

La teoría de categorías como herramienta matemática, juega un papel fundamental en el estudio de estructuras algebraicas y está siendo utilizada principalmente en ciencias de la computación y lógica multivaluada. Al establecer una equivalencia o equivalencia dual entre dos categorías, es posible intercambiar construcciones de la primera a la segunda y viceversa.

En [7], Cignoli, Dubuc y Mundici probaron una equivalencia dual entre las categorías $MVS[0,1]$ de las MV-álgebras semisimples y la categoría **Hauss** de los espacios Hausdorf compactos. Por su parte, en [30] J. Varela muestra la dualidad de Gelfand, entre las categorías **Hauss** y $C^*(\mathbb{C})$ de las álgebras de Banach con unidad e involución. En este trabajo de investigación haremos un análisis de los funtores involucrados en estas dualidades, para presentar una equivalencia entre las categorías $MVS[0,1]$ y $C^*(\mathbb{C})$.

Introducción

El estudio de lógicas que permiten más de dos valores de verdad, ha cobrado auge gracias a las aplicaciones en algunas ramas de la computación; por ejemplo, en el diseño de sistemas expertos capaces de tomar decisiones basándose en información incompleta o incierta. Una clase notable de estas lógicas son aquellas que admiten como valores de verdad cualquier número real.

En 1917, J. Lukasiewicz [16] estudió sistemas lógicos que consistían en distribuir los valores de verdad de manera uniforme en el intervalo real $[0,1]$, considerándolos desde el punto de vista semántico, es decir, estudiando el significado de los signos lingüísticos y de sus combinaciones, así propuso un sistema deductivo sencillo y conjeturó que de él podrían deducirse todas las tautologías de su lógica. A lo largo del siglo XX se establecieron pruebas de esta conjetura. Los modelos algebraicos de la lógica proposicional infinito-valuada se conocen como MV-álgebras.

En la década del 60, en [5] C. Chang introdujo el concepto de MV-álgebra con el fin de proponer una prueba algebraica del teorema de completitud del cálculo infinito-valente propuesta en 1930 por Lukasiewicz y Tarsky, con valores de verdad en el intervalo [0,1].

Una pregunta natural que podemos hacernos es, ¿bajo qué condiciones dos categorías pueden ser consideradas como «*esencialmente la misma*»?, entendiendo por esto que teoremas acerca de los objetos de una categoría pueden ser transformados en teoremas sobre objetos de la otra y viceversa.

Los teoremas de representación determinan si una estructura abstracta con ciertas propiedades es “equivalente” a una estructura concreta. De aquí que se convierta en una herramienta poderosa en este tema. Un primer trabajo donde aparece el uso de teoremas de representación es [6] en el cual C. Chan asocia las MV-álgebras con l-grupos con unidad fuerte. Este resultado mostró gran similitud entre el álgebra conmutativa y la teoría de MV-álgebras. Posteriormente Mundici en [7] define una equivalencia entre la categoría de los grupos reticulados y una subcategoría de las MV-álgebras, llamadas $MV-$álgebras prefectas. De esta manera la relación entre las dos teorías quedó completamente determinada.

En este trabajo de investigación estableceremos una dualidad entre una subcategoría de las MV-álgebras y una subcategoría de las álgebras de Banach autoadjuntas, conocidas como C^*-álgebras cuya caracterización abstracta fué determinada por I. Gelfand y M. Naimark en [14].El concepto formal de álgebra C^*, fué introducido por C. E. Rickart en 1946.

Tenemos además otro ejemplo de un teorema de representación, en donde M. Gelfand [28, 30], establece la dualidad entre las categorías **Hauss** de los espacios Hausdorff compactos y $C^*(\mathbb{C})$ de las álgebras de bananch C^*.

De esta forma, desarrollaremos el presente trabajo en tres capítulos, los cuales están distribuidos de la siguiente manera:

El primer capítulo se contextualiza al lector con las nociones necesarias relacionadas a la teoría de categorías, la teoría básica de espacios vectoriales topológicos y las álgebras de Banach , esto con el fin de brindar las herramientas necesarias para la compresión de la teoría de mayor interés, que se presenta en el siguiente capítulo.

En el capítulo dos, se introducen las categorías a estudiar que son, las $MV-$álgebras semisimples y las álgebras de Banach conmutativas C^*, éstas son subcategorías plenas de las categorías de las MV-álgebras y álgebras de Banach conmutativas, respectivamente. Se delinean propiedades y resultados de gran importancia siendo base central de nuestra investigación.

En el capítulo tres se detallan los funtores covariantes y las transformaciones naturales adecuadas para definir una equivalencia entre las categorías mencionadas previamente. Se da a conocer el respectivo teorema de equivalencia correspondiente y se muestran algunos ejemplos obtenidos de la dualidad.

Finalmente presentaremos las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo expondremos definiciones y resultados que serán de utilidad en el desarrollo del presente trabajo. Los conceptos de teoría de categorías, espacios vectoriales topológicos, topologías débiles y álgebras de Banach se citan de manera breve sin entrar en detalles técnicos. Destacaremos algunos teoremas que serán importantes para lograr los objetivos propuestos.

1.1. Teoría de Categorías

Los primeros desarrollos de la teoría de categorías vinieron impulsados en los años 40 para cubrir necesidades del álgebra homológica. Se puede considerar esta teoría, como una manera moderna de organizar las matemáticas permitiendo reunir en clases de objetos que tienen características similares, para que de esta forma su estudio sea más práctico. Un estudio más detallado acerca de esta sección puede verse en [15],[17].

Definición 1.1 (Categoría) *Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:*

C1. *Una clase $Obj(\mathcal{C})$ donde los elementos son llamados* ***objetos****.*

C2. *Una clase $Mor(\mathcal{C})$ donde los elementos son llamados* ***morfismos****.*

tal que para $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, la colección $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ denota el conjunto de los morfismos de $\mathcal{C}$ cuyo dominio es X y codominio es Y.

C3. *Una* ***ley de composición*** *para morfismos, esto es, para todo $X, Y, Z, W \in Obj(\mathcal{C})$*

se define la función

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f, \end{array}$$

esta ley de composición debe ser asociativa. Es decir, si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to W$ son tres morfismos, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\ & Z \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

C4. *La aplicación*

$$1 : Obj(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{C})$$

que a cada objeto $X \in Obj(\mathcal{C})$ le asigna el morfismo $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, que es el morfismo identidad sobre X, y que satisface; si $f : X \to Y$ entonces los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Definición 1.2 *Una **Subcategoría** $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ es una categoría que tiene la propiedad que todo objeto en $\mathcal{S}$ es un objeto en $\mathcal{C}$ y todo morfismo en $\mathcal{S}$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, además la composición y las identidades son las mismas en $\mathcal{S}$ como en $\mathcal{C}$.*

*Decimos que $\mathcal{S}$ es una subcategoría **plena** de $\mathcal{C}$, si $\mathcal{S}$ es una subcategoría tal que para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{S}$ se tiene que $Hom_{\mathcal{S}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.*

Observamos que para definir una categoría como una subcategoría plena de una categoría dada, basta con especificar su clase de objetos.

Ejemplo 1.1 La categoría **Set**, donde los objetos son conjuntos y los morfismos son las funciones entre ellos.

Ejemplo 1.2 La categoría **Top**, de todos los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas entre ellos.

Ejemplo 1.3 Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, la categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, de los espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y los morfismos son las aplicaciones lineales. Escribiremos $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ para la subcategoría plena de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ cuyos objetos son los $\mathbb{K}$-espacios de dimensión finita.

Ejemplo 1.4 Un retículo L es un conjunto dotado de dos operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ que satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y de absorción. Si las operaciones $\wedge$, $\vee$ son distributivas una respecto de la otra, el retículo se dice *distributivo*. La categoría de los retículos distributivos y acotados se denotan por **Lat**, donde los morfismos están dados por las funciones de retículo que preservan ínfimo y supremo.

Ejemplo 1.5 Dada una categoría $\mathcal{C}$, se define la *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ como la categoría con los mismos objetos de $\mathcal{C}$, cuyos morfismos $f^{op} \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$ donde $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$. La composición en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ se define como en $\mathcal{C}$ y está dada por $f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} = g \circ f$; las identidades en $\mathcal{C}^{op}$ son las mismas de $\mathcal{C}$.

Definición 1.3 *Sean $\mathcal{C}$ una categoría; $X, Y \in ObjC$ y $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Decimos que f es una inmersión si f es inyectivo. Es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \to X$ con $f \circ g = 1_X$ y $g \circ f = 1_Y$. Si $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un inmersión, denotaremos este hecho por el símbolo $f : X \hookrightarrow Y$.*

A continuación definiremos el concepto de *funtor* que más adelante nos permite relacionar dos categorías.

Definición 1.4 (Funtor) *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un funtor (o funtor* ***covariante****) de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, es una función que asigna a cada objeto X en $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ en $\mathcal{D}$, y a todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ le asigna un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ en $\mathcal{D}$, tal que*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad y \quad F(1_X) = 1_{F(Y)}.$$

Un funtor ***contravariante*** *$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, es un funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ (o equivalentemente $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$).*

Explícitamente, un funtor es contravariante si el sentido de los morfismos y la composición se invierten. Usaremos la notación $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ para denotar todos los funtores de la categoría $\mathcal{C}$ en la categoría $\mathcal{D}$.

Definición 1.5 *Un funtor $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es* ***pleno****, si para todo par de objetos $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, la función $F_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ tal que*

*$F_{X,Y}(f) = F(f)$ es sobreyectiva; es **fiel** si la anterior función es inyectiva; es **esencialmente sobreyectivo** si para cada $\mathcal{X} \in Obj(\mathcal{D})$ existe $X \in Obj(\mathcal{C})$ tal que $\mathcal{X}$ y $F(X)$ son isomorfos.*

Ejemplo 1.6 En toda categoría $\mathcal{C}$ se tiene el funtor identidad $1_{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Ejemplo 1.7 El funtor potencia de un conjunto. $\wp : Set \to Set$ donde: para $X \in Set$, $X \mapsto \wp(X)$ y a cada función $f : A \to B$ se le asocia la función inducida $\wp(f) : \wp(A) \to \wp(B)$ definida, $X \mapsto \wp(f)(X) = f(X)$. Es fácil ver que $\wp$ es un funtor covariante.

Ejemplo 1.8 El funtor contravariante $\mathbf{O} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Lat}$, tal que a cada espacio topológico X se le asigna el retículo de todos los abiertos en X con las operaciones $\cup$ y $\cap$. Y a cada función continua $f : X \to Y$ se le asigna la función $\mathbf{O}(f) : \mathbf{O}(Y) \to \mathbf{O}(X)$ donde $A \in \mathbf{O}(Y)$ se envía en el abierto $f^{-1}(A)$.

Definición 1.6 (Transformación natural) *Sean $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ funtores. Una transformación natural $\alpha : F \Rightarrow G$, es una familia*

$$\alpha = \{\alpha_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in Obj(\mathcal{C})}$$

de morfismos en $\mathcal{D}$, de modo que para todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta. Los morfismos α_X son llamados las componentes de α.

La transformación $\alpha : F \Rightarrow G$ de la definición (1.6), es un *isomorfismo* si toda componente α_X es un isomorfismo en $\mathcal{D}$, cuando esto ocurre a la transformación α se le denomina *isomorfismo natural.*

Observación 1.1 Si α es un isomorfismo natural, significa que α^{-1} existe; además α^{-1} conserva la propiedad de ser natural, dado que la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

implica la conmutatividad del siguiente

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "\alpha_X^{-1}"] \arrow[d, "G(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y^{-1}"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

Podemos construir nuevas transformaciones naturales a partir de la composición de dos o más de ellas; transformaciones con funtores y viceversa; o trabajando con la transformación inversa (cuando exista).

Operaciones entre transformaciones naturales

1. Sean $F, G, H \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ funtores y $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ transformaciones naturales. Definimos la composición de α y β como $\beta\alpha : F \Rightarrow H$, de la siguiente manera: para cada $X \in \mathcal{C}$, se define $(\beta\alpha)_X := \beta_X \alpha_X$. Es fácil ver que $\beta\alpha$ es una transformación natural.

2. Definimos también la composición de una transformación natural con un funtor. Sean $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $H \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ funtores y $\alpha : F \Rightarrow G$ una transformación natural, se define $H\alpha : HF \Rightarrow HG$ mediante $(H\alpha)_A := H(\alpha_A)$, para todo $A \in Obj(\mathcal{A})$.

3. Para la transformación natural dada por la composición de un funtor y una transformación natural: sea $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $G, H \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ funtores y $\alpha : G \Rightarrow H$ una tranformación natural, definimos $\alpha F : GF \Rightarrow HF$ mediante $(\alpha F)_A := \alpha_{F(A)}$. Se verifica inmediatamente que $H\alpha$ y αF son transformaciones naturales.

Definición 1.7 *Las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se dicen equivalentes, si existen un par de funtores $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y $G \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$; junto con dos isomorfismos naturales*

$$\eta : 1_{\mathcal{C}} \to G \circ F \quad y \quad \epsilon : F \circ G \to 1_{\mathcal{D}}.$$

Con frecuencia nos encontramos frente a dos categorías que, sin ser isomorfas, se asemejan lo suficiente como para considerarse equivalentes, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sea $\mathcal{C}$ la categoría cuyos objetos son los números naturales y tal que $Hom_{\mathcal{C}}(n, m) = M_{m \times n}(\mathbb{K})$, el conjunto de matrices de $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. La composición está dada por el producto de matrices, y para cada

$n \in \mathbb{N}$ el elemento $\mathbf{1}_n$ de $Hom_{\mathcal{C}}(n,n)$ es la matriz identidad. Entonces $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ es equivalente con $\mathcal{C}$. En efecto, para cada $V \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K},fin}$, fijemos una base $\mathcal{B}_V$ de V. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, definamos A_T como la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$. Sea $F : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K},fin} \to \mathcal{C}$ el funtor que a un $\mathbb{K}$-espacio de dimensión finita le asocia su dimensión, y que a una transformación lineal T le asocia A_T. No es difícil verificar que F es una equivalencia de categorías. Claramente no puede haber un isomorfismo de categorías entre $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K},fin}$ y $\mathcal{C}$ por motivos de cardinalidad.

Además de la noción de equivalencia de categorías, hay otras definiciones que nos permiten caracterizar objetos de una categoría en términos de otra.

Definición 1.8 *Una* ***adjunción dual*** *entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es un par de funtores contravariantes* $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *de modo que, para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{X} \in \mathcal{D}$ existen transformaciones naturales $\eta_X : X \to GF(X)$ y $\epsilon_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to FG(\mathcal{X})$ que satisfacen:*

1. *Para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ y $\phi \in Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ se tiene, $\eta_Y \circ f = GF(f) \circ \eta_X$ y $\epsilon_{\mathcal{Y}} \circ \phi = FG(\phi) \circ \epsilon_{\mathcal{X}}$; es decir, los siguientes diagramas*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ GF(X) \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathcal{X}}"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\epsilon_{\mathcal{Y}}"] \\ FG(\mathcal{X}) \arrow[r, "FG(\phi)"'] & FG(\mathcal{Y}) \end{tikzcd}$$

   conmutan.

2. *Para $\mathcal{X} \in Obj(\mathcal{D})$ y $X \in Obj(\mathcal{C})$ existe una biyección entre $Hom_{\mathcal{C}}(X, G(\mathcal{X}))$ y $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{X}, F(X))$ tal que $f = G(F(f) \circ \epsilon_{\mathcal{X}}) \circ \eta_X$ y $\phi = F(G(\phi) \circ \eta_X) \circ \epsilon_{\mathcal{X}}$ como lo muestran los siguientes diagramas,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "G(\phi)"] \\ & G(\mathcal{X}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{X}}"] \arrow[dr, "\phi"'] & FG(\mathcal{X}) \arrow[d, "F(f)"] \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

Definición 1.9 *Una adjunción dual entre las categorías $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$, denotada por $\langle F, G, \eta, \epsilon \rangle$ es:*

- *Una* ***representación dual****, si para cada $X \in \mathcal{C}$ se cumple que $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ es un isomorfismo.*

- *Una* ***equivalencia dual****, si es una representación dual y para cada* $\mathcal{X} \in \mathcal{D}$*,* $\epsilon : 1_{\mathcal{D}} \to FG$ *es un isomorfismo.*

Para llegar a una buena comprensión sobre el tema de desarrollo, es necesario abordar algunos conceptos básicos relacionados con topología, sin entrar en los detalles que recoge la teoría extensa que se propone. Esto con el fin de aportar los soportes necesarios para el entendimiento y planteamiento del problema.

1.2. Espacios vectoriales topológicos y topologías débiles

Al estudiar espacios vectoriales topológicos consideraremos dos estructuras; una algebraica de espacio vectorial (para hablar de transformaciones lineales) y otra topológica (para hablar de continuidad). Estas estructuras deben ser compatibles; es decir, al asignarle una topología a un espacio vectorial, las operaciones de suma y producto por escalares deben ser continuas. Para detalles de estos conceptos podemos ver [29] capítulo 5.

1.2.1. Nociones de topología

Un *espacio topológico* (H, τ) es un conjunto H no vacío, junto con una colección $\tau \subseteq \wp(H)$, cuyos elementos son llamados *abiertos* con las siguientes propiedades: H y $\emptyset$ son elementos de τ; la intersección de dos abiertos cualquiera es un abierto y la unión arbitraria de abiertos es abierta.

Sea (H, τ) un espacio toplológico. Una *vecindad* de un punto $p \in H$, es un conjunto $V \in \tau$ que contiene a p. (H, τ) es un *espacio de Hausdorff* si τ es una topología Hausdorff; es decir, cada par de puntos distintos de H tienen vecindades disjuntas. Un subconjunto $\tau' \subset \tau$ es una base para τ, si cada elemento de τ es unión de elementos de τ'.

Si E es un subespacio de (H, τ) y σ es el conjunto de todas las intersecciones $E \cap V$, con $V \in \tau$, entonces se prueba fácilmente que (E, σ) es un espaacio topológico. En este caso decimos que σ es la topología *heredada* de E por H.

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio Hausdorff *converge* a un punto $x \in H$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), si cada vecindad de x contine los puntos de x_n salvo posiblemente un número finito de ellos.

Sean $\{(H_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos , $H = \prod_i H_i$ el producto cartesiano de conjuntos y para cada $j_0 \in I$, aplicación la proyección $\pi_{j_0} : H \to H_{j_0}$ está dada por $\pi_{j_0}(\{a_i\})_{i\in I} := a_{j_0}$.

Dotamos a H de una topolgía τ_p, llamada la *topología producto* cuya base para abiertos son los conjuntos $\pi_i^{-1}(U)$ con $U \in \tau_i$. Esta topología así definida es la topología con menos abiertos que hace a las proyecciones continuas.

1.2.2. Espacios vectoriales topológicos

Definición 1.10 *Un espacio vectorial topológico (e.v.t.)* (X, τ) *es un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$*, dotado de una topología Hausdorff* τ *la cual hace continuas las operaciones suma y producto por escalar.*

Ejemplo 1.10 Sea K un espacio compacto. Cosideremos el conjunto

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ es continua}\},$$

dotado de la topología inducida por la norma

$$\|f\| = \sup_{t\in K} |f(t)|,$$

$\mathcal{C}(K)$ es un espacio vectorial topológico.

Observación 1.2 En general todo espacio vectorial normado X, es un espacio vectorial topológico donde la topología es inducida por la norma.

Definición 1.11 *Sea* X *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$*. Se define el* ***dual algebraico*** *de* X*, como* $X^* = \{\varphi : X \to \mathbb{K} \,/\, \varphi \text{ - funcional lineal}\}$.

X^* es también un espacio vectorial con la norma de operadores

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| \;/\; x \in X, \|x\| \le 1\}.$$

Podemos llamar a X^{**}, el **bidual** algebráico de X, al dual algebraico de X^*.

Describimos a continuación una particularidad de los elememtos de X^* de la definición anterior, cuando éstos son continuos. La topología que se considerará, sera la inducidad por la norma.

Teorema 1.2.1 ([28], Teorema (1.18)) *Sea* X *un espacio normado y* φ *un funcional lineal no nulo, entonces* φ *es continua si y sólo su núcleo es cerrado.*

1.2.3. Topología débil y $*$-débil

Definición 1.12 *Si X es un conjunto no vacío y τ_1, τ_2 son topologías sobre X, decimos que τ_1 es más débil que τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

Observación 1.3 Si la topología τ_1 es más debil que la topología τ_2, nos dice que τ_1 tiene menos abiertos que τ_2.

Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de X entonces la topología generada por $\mathcal{F}$ es la topología con menos abiertos que contiene a $\mathcal{F}$. Dada una familia Ω de funciones $f : X \to Y_f$, donde cada Y_f es un espacio topológico (con una topología τ_f), la Ω-*topología* sobre X o *topología débil* inducida por Ω sobre X, es la topología generada por

$$B = \left\{ f^{-1}(V) \,/\, f \in \Omega,\, V \text{ es abierto en } Y_f \right\}.$$

Es decir, es la topología más débil para la cual cada $f \in \Omega$ es continua. Los abiertos de esta topología son las uniones de intersecciones finitas de elementos de B.

Sea X un espacio vectorial topológico. Para cada $x \in X$ asociamos un único funcional lineal

$$f_x : X^* \to \mathbb{K}$$

definido por $f_x(h) = h(x)$, para todo $h \in X^*$. La X-topología o la topología inducida por los f_x sobre X^*, es la topología $*$-*débil*.

El siguiente teorema, establece que la bola unitaria cerrada del espacio dual de un espacio vectorial normado es compacta con la topología débil. Este resultado es de utilidad en la prueba del teorema (1.3.3) en la siguiente sección.

Teorema 1.2.2 (Banach-Alaoglu) ([28], Teorema (3.15)) *Para todo X un espacio normado, la bola unitaria $\mathcal{S}$ de X^* es $*$-débil compacta.*

1.3. Álgebras de Banach

Las Algebras de Banach son estructuras analíticas que han tomado relevancia en la matemática a partir de los trabajos de von Neuman y Murray en los años 30, como una línea de desarrollo matemático del análisis Funcional, en la cual se relacionan dos de los conceptos fuertes de las matemáticas, los espacios de Banach y las álgebras. Una presentación completa de álgebras de Banach se encuentran en [28].

1.3.1. Conceptos básicas

Definición 1.13 *Sea A un anillo conmutativo unitario. Una A-álgebra o una álgebra sobre A es un anillo B junto con un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ tal que $f(a) \cdot (x \cdot y) = x \cdot (f(a) \cdot y)$ para todos $a \in A$ y $x, y \in B$.*

Observación 1.4 Observe que si B es una A-álgebra entonces B es de manera natural un A-módulo, con acción $\cdot$ definida por $a \cdot b := f(a)b$ donde el segundo producto es el producto en el anillo B. Si B es unitario (conmutativo), entonces decimos que B es una A-álgebra unitaria (conmutativa).

En particular si A es un campo $\mathbb{K}$ y $B \neq 0$, entonces el homomorfismo f es inyectivo y $\mathbb{K}$ puede identificarse canónicamente con su imagen en B, en consecuencia, una $\mathbb{K}$-álgebra es un anillo que contiene a $\mathbb{K}$ como un subanillo. Es claro que si B es una $\mathbb{K}$-álgebra, entonces B es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y en este caso su dimensión será la dimensión como espacio $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Ejemplo 1.11 Si A es un anillo conmutativo unitario, entonces existe un homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Z} \to A$ dado por $n \mapsto n \cdot 1$. Así todo anillo es de manera natural una $\mathbb{Z}$-álgebra

Definición 1.14 *Una $\mathbb{K}$-álgebra X se dice normada, si X es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y para todo $x, y \in X$ se cumple que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$. Una $\mathbb{K}$-álgebra normada X es completa si cada sucesión de Cauchy en X converge a un elemento $x_0 \in X$. Una $\mathbb{K}$-álgebra X tiene unidad, si existe $\mathbf{1} \in X$ con la propiedad $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x, \quad \text{para todo}$ $x \in X$.*

Definición 1.15 (Álgebra de Banach) *Una $\mathbb{K}$-álgebra X es de Banach, si es una $\mathbb{K}$-álgebra normada y completa.*

Ejemplo 1.12 El ejemplo más sencillo de $\mathbb{C}$-álgebra de Banach con elemento unidad es el campo $\mathbb{C}$, con las operaciones suma y producto por escalar usual, y la norma del módulo.

Ejemplo 1.13 Sea X un espacio de Banach complejo. El álgebra $\mathcal{B}(X)$ de todos los operadores lineales acotados sobre X es un álgebra de Banach con las operaciones usuales y la norma usual de operadores, dada por

$$\|A\| := \max_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\| .$$

Esta es un álgebra de Banach con unidad no conmutativa; si los operadores en particular son matrices $A, B \in \mathcal{B}(X)$ se tiene en ocasiones que $AB \neq BA$.

Ejemplo 1.14 El espacio de Banach de funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$, definidas en el intervalo $[0,1]$ equipado con la norma del supremo, $\|f\| = \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|$ y la multiplicación definida puntualmente $(fg)(s) = f(s)g(s), \quad \text{para} \;\; s \in [0,1]$, se convierte en un álgebra de Banach conmutativa con unidad; la función $f(x) = 1$ es el elemento unidad. Esta álgebra la denotaremos por $\mathcal{C}([0,1])$.

Un subconjunto $Y \subseteq X$ es una *subálgebra*, si Y es un subespacio vectorial cerrado bajo el producto. Sea X un $\mathbb{K}$-álgebra de Banach con elemento unidad; se dice que $x \in X$ es *invertible* en X, si existe $y \in X$ tal que $xy = yx = \mathbf{1}$. Los elementos invertibles en un $\mathbb{C}$-álgebra con unidad se denominan también *elementos regulares* o *no singulares*. Si $x \in X$ es invertible notaremos por x^{-1} a su inverso. Si y es un elemento de la $\mathbb{C}$-álgebra X entonces el *espectro* de y, el cual denotamos por $\mathrm{Sp}(y)$, es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $x - \lambda\mathbf{1}$ es no invertible en X.

Proposición 1.3.1 *Sean X una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach con elemento unidad $\mathbf{1}$. Entonces el conjunto de elementos invertibles es abierto en X y $x \mapsto x^{-1}$ es continua. Si $x \in X$ y $\|x\| < 1$, entonces $\mathbf{1} - x$ es regular (invertible) y $(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Demostración. Sea X un $\mathbb{C}$-álgebra de Banach con identidad, denotaremos a $G(X)$ como el conjunto de los elementos invertibles de X. Sea $x \in G(X)$, entonces para todo $y \in B(x, \frac{1}{\|x^{-1}\|})$, se tiene que $\|x^{-1}(y-x)\| < 1$. Además $\mathbf{1} + x^{-1}(y-x)$ es invertible y por tanto $y = x(\mathbf{1} + x^{-1}(y-x))$ es invertible, lo que es lo mismo $G(X)$ es abierto. Para mostrar la continuidad, observemos primero que para $x, y \in G(X)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\|y^{-1} - x^{-1}\right\| &= \left\|(x+\eta)^{-1} - x^{-1}\right\| \\
&= \left\|(x(\mathbf{1} + x^{-1}\eta))^{-1} - x^{-1}\right\| \\
&= \left\|((\mathbf{1} + a^{-1}\eta)^{-1} - \mathbf{1})x^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|(\mathbf{1} + x^{-1}\eta) - \mathbf{1}\right\| \left\|x^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{\|x^{-1}\eta\|}{1 - \|x^{-1}\eta\|} \left\|x^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{\|x^{-1}\| \, \|\eta\|}{1 - \|x^{-1}\| \, \|\eta\|} \left\|x^{-1}\right\|
\end{aligned}
$$

Para $\epsilon > 0$ podemos escoger a δ de modo que

$$
\frac{\delta \left\|x^{-1}\right\|^2}{1 - \delta \left\|x^{-1}\right\|} < \epsilon,
$$

entonces $\|y^{-1} - x^{-1}\| < \epsilon$ siempre que $\|y - x\| < \delta$.

Para la prueba de la segunda parte, consideremos $y_N = \sum_{n=0}^{N}$. Como $\|x\| < 1$, es fácil ver que $\{y_N\}$ es de Cauchy y y_N converge a algún $y \in X$. Observemos que $(\mathbf{1}-x)y_N = y_N(\mathbf{1}-x) = \mathbf{1}-x^{N+1} \to \mathbf{1}$. Por la continuidad de la multiplicación, tenemos que $(\mathbf{1}-x)y = y(\mathbf{1}-x) = \mathbf{1}$, el cual muestra que $\mathbf{1}-x \in G(X)$ y $(\mathbf{1}-x)^{-1} = y$.

■

Observación 1.5 Sean X una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach y $x \in X$. Si $\|x\| < 1$ entonces la serie $\mathbf{1} + x + x^2 + ... + x^n + ...$ es convergente. En particular si $x \in X$ es tal que $\|\mathbf{1} - x\| < 1$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{1}-x)^n = (\mathbf{1}-(1-x))^{-1} = x^{-1},$$

es decir, x es invertible.

Observación 1.6 Sean X una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach, $x \in X$ y $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$, entonces necesariamente $|\lambda| \leq \|x\|$ pues si $\|x\| < |\lambda|$ implica que $\dfrac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ y por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = \left(\mathbf{1}-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{(\lambda\mathbf{1}-x)^{-1}}{\lambda^{-1}} = -\lambda\left(x-\lambda\mathbf{1}\right)^{-1},$$

de donde se tiene $x - \lambda\mathbf{1}$ es invertible, contradicendo así la definición.

Definición 1.16 *Sean X y Y álgebras de Banach. Un homomorfismo de álgebras de Banach es una función*

$$\Phi : X \to Y$$

tal que, para todo $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\Phi(\alpha x + y) = \alpha\Phi(x) + \Phi(y)$
2. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$

Si X e Y son álgebras de Banach con unidad entonces, $\Phi : X \to Y$ es un homomorfismo unidad si para 1_X como unidad de X,se cumple que $\Phi(1_X) = 1_Y$.

Observación 1.7 Es importante tener encuenta que las álgebras de Banach son espacios de Banach, por tanto los homomorfismos de álgebras de Banach son transformaciones lineales continuas.

Las álgebras de Banach conmutativas con los morfismos definidos en (1.16) forman la categoría de las álgebras de Banach conmutativas. Notaremos mediante $\mathcal{AB}$ tal categoría.

Terminamos esta sección con un resultado que caracteriza una clase especial de Álgebras de Banach, mas precisamente.

Teorema 1.3.1 (**Gelfand-Mazur**) ([28], Teorema (10.14)) *Si X es un Álgebra de Banach tal que todo elemento no nulo es invertible, entonces X es (isométricamente isomorfa) $\mathbb{C}$.*

1.3.2. Ideales y Caracteres

Presentamos en esta sección algunos hechos importantes de ideales y caracteres de un álgebra de Banach e introducimos una topología para el espacio de *caracteres* que resulta ser el espacio de ideales maximales. La teoría que se presenta a continuación está dada para álgebras de Banach conmutativas y con unidad, puesto que son las que necesitamos para el desarrollo del trabajo presentado.

Definición 1.17 *Sea X un álgebra de Banach. Un subconjunto $I \subset X$, es un ideal de X si I es subespacio de X, y para cada $x \in X$ y $i \in I$ se tiene que $x \cdot i \in I$. Un ideal I de un álgebra X es propio si $I \neq X$.*

La definición anterior es realmente la definición de un ideal izquierdo lo cual es irrelevante pues todas nuestras algebras son supestas conmutativas. De otro lado, observe que si $I \subset X$ es un ideal propio, entonces $\mathbf{1} \notin I$ y por tanto, ningún ideal propio tiene elementos invertibles.

Definición 1.18 *Un ideal $M \subset X$ se dice maximal si no está contenido en ningún ideal distinto de si mismo. Denotaremos por Δ_X al conjunto de ideales maximales X.*

Definición 1.19 *Sea X un álgebra de Banach. Un homomorfismo de álgebras de Banach no nulo, $\mathfrak{h} : X \to \mathbb{C}$ es llamado* ***caracter***. *El conjunto de todos los caracteres del álgebra se denota por* $\mathrm{Char}(X)$.

El siguiente teorema establece que para un álgebra de Banach X conmutativa con unidad, existe una correspondencia entre el conjunto Δ_X de ideales maximales del álgebra y el conjunto $\mathrm{Char}(X)$ de caracteres.

Teorema 1.3.2 ([28], Teorema (11.5)) *Sea X un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces*

1. *Todo ideal maximal M de X es cerrado y es el núcleo de algún $\mathfrak{h} \in \mathrm{Char}(X)$.*
2. *Si $\mathfrak{h} \in \mathrm{Char}(X)$, entonces $\mathrm{Ker}(\mathfrak{h}) \in \Delta_X$.*

Demostración. 1. Supongamos que M es un ideal maximal de X, puesto que M no contiene unidades y el conjunto de elemenmtos invertibles es abierto (Proposición (1.3.1)), entonces $\overline{M}$ tampoco contiene elementos invertibles. Ahora, puesto que $\overline{M}$ es un ideal propio de X y M es maximal, se concluye que $\overline{M} = M$. De otro lado, X/M es un álgebra de Banach puesto que M es cerrado, más aún, X/M tiene estructura de campo y por lo tanto todo elemento no nulo es invertible. El Teorema (1.3.1) garantiza la existencia de un isomorfismo j de X/M a $\mathbb{C}$. Ahora basta considerar la composición de homomorfismos

$$X \xrightarrow{\pi} X/M \xrightarrow{j} \mathbb{C}.$$

2. Es claro que $\mathfrak{h}^{-1}(0)$ es un ideal de X. Ahora puesto que $\mathfrak{h}$ es un homomorfismo de anillos, existe una correspondencia entre los ideales de $\mathbb{C}$ y los ideales de X que contienen a $\mathfrak{h}^{-1}(0)$ y puesto que $\mathbb{C}$ no tiene ideales propios se sigue $\mathfrak{h}^{-1}(0)$ es maximal.

■

El teorema anterior nos permite observar que a cada caracter le corresponde un ideal maximal (su núcleo) y, recíprocamente, cada ideal maximal es el núcleo de algún caracter. En consecuencia Δ_X y $\mathrm{Char}(X)$ son isomorfos (en la categoría de los conjuntos) de ahí que se suele llamar a el conjunto $\mathrm{Char}(X)$ como el espacio de *ideales maximales* del álgebra X.

El lema que enunciamos a continuación nos admite definir una topología para el conjunto Char(X), que resulta ser la topología heredada de X^*; es decir, la topología débil denominada ***topología de Gelfand***.

Lema 1.3.1 ([10], Teorema (15.3.1)) *Sean X un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $\mathfrak{h} \in \mathrm{Char}(X)$. Entonces $\mathfrak{h}$ es continuo y se cumple que*

$$\|\mathfrak{h}\| = 1 = \mathfrak{h}(\mathbf{1}).$$

Demostración. Sea $\mathfrak{h} \in \mathrm{Char}(X)$ puesto que

$$\begin{aligned} 0 \neq \mathfrak{h}(\mathbf{1}) &= \mathfrak{h}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}), \\ &= \mathfrak{h}(\mathbf{1}) \cdot \mathfrak{h}(\mathbf{1}), \end{aligned}$$

entonces $\mathfrak{h}(\mathbf{1}) = 1$. Además, si x es invertible $\mathbf{1} = x \cdot x^{-1}$ implica que $1 = \mathfrak{h}(x \cdot x^{-1}) = \mathfrak{h}(x) \cdot \mathfrak{h}(x^{-1})$, de donde se deduce que $\mathfrak{h}(x)$ es invertible. Más aún, $\mathfrak{h}(x) \in \mathrm{Sp}(x)$, ya que de no ser así $x - \mathbf{1}\mathfrak{h}(x)$, sería invertible y se tendría

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}(x - \mathbf{1}\mathfrak{h}(x)) &= \mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(\mathbf{1}\mathfrak{h}(x)) \\
&= \mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x)\mathfrak{h}(\mathbf{1}) \\
&= \mathfrak{h}(x) - \mathfrak{h}(x) = 0
\end{aligned}$$

lo que es absurdo, porque 0 no es invertible.

De otro lado, $\mathfrak{h}(x) \in \mathrm{Sp}(x)$ y de la observación (1.6), se tiene $|\mathfrak{h}(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$, y por lo tanto $\mathfrak{h}$ resulta ser continuo y

$$\|\mathfrak{h}\| = \sup \left\{ |\mathfrak{h}(x)| \ : \ \|x\| \leq 1 \right\} = 1. \qquad \blacksquare$$

Al dotar de la topología de Gelfand al espacio de caracteres del álgebra X, se concluye el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3 ([28], Teorema (11.9)) *Si X un álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces* $\mathrm{Char}(X)$ *es un espacio Haussdorff compacto.*

Demostración. Consideremos X^* el espacio dual de X (visto a X como espacio de Banach) con la topología $*$-débil es un espacio Hausdorff y como $\mathrm{Char}(X)$ es un subespacio de X^*, entonces también es Hausdorff con la topología $*$-débil. Probemos en general

$$\mathrm{Char}(X) \cup \{0\} \subseteq \{\mathfrak{h} \in X^* : \|\mathfrak{h}\| \leq 1\},$$

es $*$-débil cerrado y por ser $\{\mathfrak{h} \in X^* : \|\mathfrak{h}\|_{X^*} \leq 1\}$ $*$-débil compacto. Para ello consideremos, $\{\mathfrak{h}_i\}_i \subseteq \mathrm{Char}(X) \cup \{0\}$ tal que, $\mathfrak{h}_i \xrightarrow[*\text{-débil}]{} \mathfrak{h}$ para algún $\mathfrak{h} \in X^*$.

Luego, para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que:

- $\mathfrak{h}(\lambda x + y) = \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(\lambda x + y) = \lim\limits_{i \in I} [\mathfrak{h}_i(\lambda x) + \mathfrak{h}_i(y)]$
  $= \lambda \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(x) + \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(y) = \lambda \mathfrak{h}(x) + \mathfrak{h}(y)$.
- $\mathfrak{h}(xy) = \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(xy) = \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(x)\mathfrak{h}_i(y) = \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(x) \lim\limits_{i \in I} \mathfrak{h}_i(y) = \mathfrak{h}(x)\mathfrak{h}(y)$.

Así $\mathrm{Char}(X)$ es un subconjunto cerrado en la topología $*$-débil en la bola unidad $\mathcal{S}$ de X^*. Por el teorema de Banach-Alaoglu (1.2.2), la bola unidad de X^* es $*$-débilmente compacta. Por lo tanto $\mathrm{Char}(X)$ es compacto, con la topología inducida ($*$-débil). $\blacksquare$

Definición 1.20 (Transformada de Gelfand) *Sean X un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $x \in X$.Se define la trasformada de Gelfand de $x \in X$ como la función*

$$\widehat{x} : \mathrm{Char}(X) \to \mathbb{C}$$

definida por $\widehat{x}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}(x)$.

Definimos la transformada de Gelfand para X, como la función

$$\wedge_X : X \to \mathcal{C}(\mathrm{Char}(X))^1$$

definida por $x \mapsto \widehat{x}$.

Observación 1.8 La topología de Gelfand en $\mathrm{Char}(X)$ es la topología inducida de X^*, donde el espacio dual X^* es considerado con la topología $*$-débil y $\mathbb{C}$ con la topología usual.

La siguiente proposición nos muestra una característica de la transformada de Gelfand, que servirá de ayuda en la prueba del teorema de Gelfand-Naimark (2.2.3). Su demostración se puede consultar en [28] o [30].

Proposición 1.3.2 ([28], Teorema (11.12)) *Sea X un álgebra de Banach conmutativa con unidad. La transformada de Gelfand $x \to \widehat{x}$ es una isometría si y sólo si $\|x^2\| = \|x\|^2$ para todo $x \in X$.*

[1] $\mathcal{C}(\mathrm{Char}(X)) := \{\Phi : \mathrm{Char}(X) \to \mathbb{C} \,/\, \Phi \text{ continua}\}$

Capítulo 2

MV-Álgebras y C^*-álgebras

En este capítulo se presenta los conceptos y algunas propiedades de MV-álgebras y álgebras de Banach C^*, las cuales definiran las categorías sobre las cuales trabajaremos.

2.1. MV-álgebras

La teoría de las MV-álgebras fué presentada como semántica algebráica en 1958 por Chen Chung en [5] para demostrar el teorema de completez del cálculo proposicional multivaluado de Lukasiewicz. Las definiciones y resultados que empleamos en esta sección siguen la dirección de Cignoli-D'Ottaviano-Mundici [6], Dubuc-Poveda [11].

2.1.1. Generalidades

Definición 2.1 (MV-álgebra) *Una MV-álgebra es un conjunto $\langle A, \oplus, \neg, 0\rangle$ con una operación binaria $\oplus$, una operación unaria $\neg$ y un elemento destacado 0_A que satisface las siguientes identidades:*

MV1 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

MV2 $a \oplus b = b \oplus a$

MV3 $a \oplus 0_A = a$

MV4 $\neg\neg a = a$

MV5 $a \oplus \neg 0 = \neg 0$

MV6 $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a.$

Una *subálgebra* de una MV-álgebra A, es un subconjunto S de A que contiene el elemento 0_A y es cerrado bajo las operaciones de A restingidas a S.

Ejemplo 2.1 $\langle [0,1], \oplus, \neg, 0\rangle$ es una MV-álgebra, con las operaciones $\neg a = 1 - a$ y $a \oplus b = \text{mín}\{1, a+b\}$.

En adelante se denotará a la MV-álgebra $\langle [0,1], \oplus, \neg, 0\rangle$ simplemente como A.

Ejemplo 2.2 (Álgebras de Lukasiewicz). Para cada entero $n \geq 2$, el conjunto de $n-$elementos definido por:

$$\mathbf{L}_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\},$$

es una MV-álgebra con las operaciones $\oplus$ y $\neg$ definidas en el ejemplo anterior, además cada conjunto L_n es una subálgebra de $\langle [0,1], \oplus, \neg, 0\rangle$.

Ejemplo 2.3 Sean A es una MV-álgebra y X un conjunto no vacío. El conjunto A^X de todas las funciones $f : X \to A$, es una MV-álgebra con las operaciones definidas puntualmente, es decir, para cada $a \in A$ y f, g elementos de A^X tenemos que $(f \oplus g)(a) = f(a) \oplus_A f(b)$ y $(\neg f)(a) = \neg(f(a))$. La función constante 0_A es tomado como elemento destacado.

Ejemplo 2.4 Si tomamos $A = [0,1]$ y $X = H$ un espacio topológico en el ejemplo anterior, entonces se verifica facilmente que el conjunto $\mathrm{Cont}(H)$, de las funciones continuas definidas sobre H es una subálgebra de $[0,1]^H$.

Ejemplo 2.5 El conjunto $\mathrm{Cont}([0,1])$ de funciones continuas de [0, 1] en [0, 1] es una MV-álgebra con las operaciones: $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$ y $\neg f(x) = 1 - f(x)$, para $x \in [0,1]$.

Ejemplo 2.6 (MV-álgebras libres). $free_1$ es el conjunto de funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ tales que

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + b_1 & \text{si} \quad 0 \leq x < a_1 \\ & \vdots \\ m_i x + b_i & \text{si} \quad a_{i-1} \leq x < a_i \\ & \vdots \\ m_k x + b_k & \text{si} \quad a_{k-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

con b_i, $m_i \in \mathbb{Z}$, f continua respecto a la topología usual de $[0,1]$ y las operaciones $\oplus$ y $\neg$ definidas para $x \in [0,1]$ como: $f(x) \oplus g(x) = \text{mín}\{1, f(x) + g(x)\}$ y $\neg f(x) = 1 - f(x)$ con f, $g \in free_1$.

En toda MV-álgebra A se define la constante 1 y las operaciones $\odot$ y $\ominus$ como sigue:

MV7 $1 = \neg 0$

MV8 $a \odot b = \neg(\neg a \oplus \neg b)$

MV9 $a \ominus b = a \odot \neg b$

Una MV-álgebra es no trivial, si $1 \neq 0$. Las siguientes identidades son consecuencia inmediata de **MV4.**

MV10 $\neg 1 = 0$

MV11 $a \oplus b = \neg(\neg a \odot \neg b)$,

además si $b = \neg 0$ entonces, en **MV6,** se tiene

MV12 $a \oplus \neg a = 1$

MV13 Existe una relación de orden parcial definida como: $a \leq b \Leftrightarrow \exists c,\ a \oplus c = b$, se sigue $a \leq b \Leftrightarrow a \ominus b = 0$.

Los axiomas **MV5** y **MV6** se pueden ver como

MV5' $a \oplus 1 = 1$

MV6' $(b \ominus a) \oplus b = (b \ominus a) \oplus a$.

2.1.2. Homomorfismos e ideales

Definición 2.2 *Dadas dos MV-álgebras A y B, una función $h : A \to B$ es un homomorfismo de MV-álgebras o un MV-homomorfismo si para todas $a, b \in A$ se tiene;*

1. $h(0) = 0$,

2. $h(a \oplus b) = h(a) \oplus h(b)$ *y*

3. $h(\neg a) = \neg h(a)$.

Sea h es un MV-homomorfismo, diremos que h es una inmersión si es inyectivo, un MV-isomorfismo si h es una inmersión sobreyectiva. Dos MV-álgebras A y B son MV-isomorfas ($A \cong B$) si y sólo si, exite un MV-isomorfismo de A en B. Como es usual, definimos el *núcleo* de un MV-homomorfismo $h : A \to B$ como el conjunto $\mathrm{Ker}(h) = \{a \in A : h(a) = 0\}$. A continuación introducimos el concepto de ideal.

Definición 2.3 *Un ideal de una MV-álgebra A es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:*

I1. $0 \in I$,

I2. *Si* $a \in I$, $b \in A$ *y* $b \leq a$ *entonces* $b \in I$,

I3. *Si* $a \in I$ *y* $b \in I$ *entonces* $a \oplus b \in I$.

La intersección de una familia de ideales de A es también un ideal de A. Un ideal I de una MV-álgebra A es *propio* si $I \neq A$.

Definición 2.4 *Sean* P *y* M *ideales de una* MV*-álgebra* A*. Diremos que* P *es un ideal primo si es propio y satisface la siguiente condición:*

$$\text{Para cada } a,\ b \text{ en } A, \text{ se tiene } (a \ominus b) \in P \text{ ó } (b \ominus a) \in P.$$

M *es llamado maximal si es propio y ningún ideal propio de* A *contiene a* M*.*

Denotamos por $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{M}(A)$ al conjunto de ideales, ideales primos e ideales maximales de A respectivamente. Dada una una MV-álgebra A, dotamos al conjunto $\mathcal{P}(A)$ de una topología τ, la cual llamaremos topología co-Zariski, cuya base de abiertos está dada por los conjuntos de la forma

$$W_a = \{P \in \mathcal{P}(A) \,:\, a \in P\}.$$

Al espacio topológico $(\mathcal{P}(A), \tau)$ lo llamaremos el *espectro primo* de la MV-álgebra A. Debe observarse que los abiertos W_a son precisamente conjuntos cerrados correspondientes a la topología de Zariski definida sobre el espectro primo de los anillos conmutativos unitarios (Ver [26]).

Ejemplo 2.7 Sean C un conjunto no vacío y A una subálgebra de la MV-álgebra $[0,1]^C$. Para todo $S \subseteq A$, el conjunto $J_S = \{f \in A \,/\, f(x) = 0 \text{ para todo } a \in S\}$ es un ideal en A. Más aún, si $S = \{c\}$ para algún $c \in C$ el conjunto

$$J_{\{c\}} = \big\{f \in A \,:\, f(c) = 0\big\}$$

es un ideal maximal en A. La prueba de este resultado se puede consultar en [6], Lema (3.4.1).

Ejemplo 2.8 Para toda MV-álgebra A podemos asegurar que por lo menos hay dos ideales (ideales triviales), el ideal cero y la misma MV-álgebra A. Por ejemplo: La MV-álgebra $[0,1]$ sólo tiene como ideales el conjunto $\{0\}$ y el intervalo $[0,1]$. Si I es un ideal de $[0,1]$ entonces, para $x \in I$, $y \in [0,1]$ donde $y \leq x$ tenemos: si $x = 0$, entonces $y = 0$; si $x \neq 0$ por la propiedad arquimediana $\frac{y}{x} \leq 1$, se tiene que $1 \in I$, lo que implica que $I = [0,1]$.

A continuación presentamos algunas propiedades entre ideales y el núcleo de MV-homomorfismos.

Proposición 2.1.1 [6] *Si A, B MV-álgebras, y $h : A \to B$ un MV-homomorfismo, entonces:*

i. *Para cada $J \in \mathcal{I}(B)$, $h^{-1}(J) = \{a \in A : h(a) \in J\} \in \mathcal{I}(A)$. En particular* $\mathrm{Ker}(h) \in \mathcal{I}(A)$.

ii. $h(a) \leq h(b)$ *si y sólo si* $a \ominus b \in \mathrm{Ker}(h)$.

iii. h *es inyectiva si y sólo si* $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$.

iv. $\mathrm{Ker}(h) \neq A$ *si y sólo si en B, el elemento cero* (0) *no coincide con* 1 *(en forma corta, B es no trivial).*

v. $\mathrm{Ker}(h) \in \mathcal{P}(A)$ *si y sólo si B es no trivial y la imagen $h(A)$ es una subálgebra de B.*

Sea $H \neq \emptyset$ un espacio topológico. Una subálgebra A de $[0,1]^H$ se dice que *separa puntos* si para todo x, y en H con $x \neq y$, existe $f \in [0,1]^H$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) > 0$. Como una consecuencia del teorema de Urysohn tenemos que: Si (H, τ_H) es un espacio topológico Hausdorff compacto y $[0,1]$ dotado con la topología usual τ_u, entonces $\mathrm{Cont}(H)$ es una subálgebra de $[0,1]^H$ que separa puntos.

El siguiente teorema nos muestra una característica de las MV-álgebra que separan puntos, mostrando que en el caso de la MV-álgebra $\mathrm{Cont}(H)$ sus ideales puede describirse de forma explícita.

Teorema 2.1.1 ([6], Teorema (3.4.3)) *Sea H un espacio Hausdorff compacto y A una subálgebra que separa puntos de la MV-álgebra* $\mathrm{Cont}(H)$*, entonces la función $\varphi : H \to \mathcal{M}(A)$ dada por $x \to J_x$, donde $J_x = \{f \in A : f(x) = 0\}$ es una correspondencia biunívoca entre H y el conjunto de ideales maximales de A, $\mathcal{M}(A)$.*

2.1.3. El espacio espectral de los MV-morfismos $[0,1]$ valuados

En esta sección asociaremos un espacio topológico a una MV-álgebra A, dicho espacio es una herramienta fundamental para establecer el objetivo de este trabajo. Tomamos como referencia a seguir el trabajo presentado en [21].

En las definiciones y resultados siguientes, el intervalo $[0,1]$ será visto como subespacio cerrado de $\mathbb{R}$ y la MV-álgebra A denotará un conjunto de índices.

Definición 2.5 *Dada la familia* $\{[0,1]_a\}_{a\in A}$. *El producto cartesiano* $\prod\limits_{a\in A}[0,1]_a$ *es el conjunto de funciones,*

$$\{e : A \to \bigsqcup_{a\in A}[0,1]_a \mid e(a) \in [0,1]_a \text{ para cada } a \in A\}.$$

El valor $e(a)$ *se le llama la* a*-ésima coordenada de* e. *El símbolo* $\bigsqcup$ *significa unión disjunta.*

Nota 1 Sean $\{[0,1]_a\}_{a\in A}$ una familia de espacios indexado por los elementos de la MV-álgebra A y Γ el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod\limits_{a\in A}[0,1]_a$ de la forma

$$\langle W_{a_0}\rangle = \prod_{a\in A} W_a$$

donde W_{a_0} es un subconjunto abierto de $[0,1]_{a_0}$ y $W_a = [0,1]_a$ si $a \neq a_0$. La topología generada por Γ como subbase, recibe el nombre de la topología producto. El espacio $\prod\limits_{a\in A}[0,1]_a$ provisto de dicha topología se denomina *espacio producto*.

Definición 2.6 *Sea* $\prod\limits_{a\in A}[0,1]_a$ *el espacio producto. Para* $b \in A$, *el* MV*-homomorfismo*

$$\pi_b : \prod_{a\in A}[0,1]_a \to [0,1]_b,$$

dado por $\pi_b(e) = e(b)$ *se denomina la* b*-ésima proyección.*

Proposición 2.1.2 *Toda proyección* $\pi_b : \prod\limits_{a\in A}[0,1]_a \to [0,1]_b$, *con* $b \in A$ *es una función continua con la topología usual de* $[0,1]$ *y la topología producto.*

Demostración. Para probar que π_b es continua, notemos que si W_b es un abierto arbitrario de $[0,1]_b$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_b^{-1}(W_b) &= \left\{e \in \prod_{a\in A}[0,1]_a \ : \ e(b) \in W_b\right\}\\ &= \langle W_b\rangle\end{aligned}$$

el cual es abierto en $\prod\limits_{a\in A}[0,1]_a$, por tanto π_b es continua. ■

Proposición 2.1.3 *La topología producto es la topología menos fina que hace continuas todas las proyecciones*

$$\pi_b : \prod_{a\in A}[0,1]_a \to [0,1]_b.$$

Demostración. Sea $\prod_{a \in A} [0,1]_a$ el espacio producto y denotemos por τ_p la topología producto en $\prod_{a \in A} [0,1]_a$. En la proposición anterior vimos que respecto a τ_p todas las proyecciones son continuas. Supongamos que existe una topología τ' en $\prod_{a \in A} [0,1]_a$ tal que todas las proyecciones $\pi_b : \prod_{a \in A} [0,1]_a \to [0,1]_b$ son continuas, entonces para cualquier $a \in A$ y para cualquier abierto $W_a \subset [0,1]_a$, se tiene que $\pi_a^{-1}(W_a) = \langle W_a \rangle \in \tau'$, así, τ' es una topología que contiene todos los elementos subbásicos de τ_p. Luego $\tau_p \subset \tau'$. ■

Observación 2.1 Sea A una MV-álgebra, el conjunto

$$\mathbb{H}(A) = \{\alpha : A \to [0,1] : \alpha \text{ es un } MV\text{-homomorfismo}\},$$

es claramente un subconjunto de $\prod_{a \in A} [0,1]_a$.

Para cada $a \in A$ y $U \subset [0,1]$ abierto, definimos $W_{a,U} \subset \mathbb{H}(A)$ como,

$$W_{a,U} = \{\alpha \in \mathbb{H}(A) \,/\, \alpha(a) \in U\}.$$

Si denotamos por Γ la colección

$$\Gamma = \{W_{a,U} \,:\, a \in A,\, U \text{ un abierto de } [0,1]\},$$

entonces puesto que Γ cubre al espacio $\mathbb{H}(A)$ (de hecho $\mathbb{H}(A) \in \Gamma$ ya que $\mathbb{H}(A) = W_{a,[0,1]}$ para cualquier $a \in A$), existe una única topología en $\mathbb{H}(A)$ para la cual Γ es subbase. La topología τ_p para $\mathbb{H}(A)$, es la que se hereda del espacio producto $[0,1]^A$, la cual se suele llamar *topología de la convergencia puntual* (Ver [21]).

Además como el intervalo unidad, visto como subespacio cerrado de $\mathbb{R}$ es Hausdorff, entonces $\mathbb{H}(A)$ también lo es (Ver teorema (3.5) de [21]).

Finalizamos nuestra introducción del espacio $\mathbb{H}(A)$ con la siguiente proposición, que nos muestra una correspondencia que existe entre $\mathbb{H}(A)$ y el espacio $\mathcal{M}(A)$ de ideales maximales, de ahí el nombre de espacio espectral para $\mathbb{H}(A)$.

Proposición 2.1.4 ([22], Proposición (2.1.2)) *Sea A una MV-álgebra. La aplicación $\gamma : \mathbb{H}(A) \to \mathcal{M}(A)$ tal que a cada MV-homomorfismo $\alpha : A \to [0,1]$ le asigna el núcleo de α, es una función biyectiva.*

2.1.4. MV-álgebras Semisimples.

En nuestro trabajo consideraremos la categoría $MVS[0,1]$ de las MV-algebras semisimples, que es una subcategoría plena de las MV-álgebras.

Definición 2.7 *Sea A una MV-álgebra. Definimos el radical de A, como la intersección de todos los ideales maximales de A, denotado por* $\mathrm{Rad}(A)$. *La MV-álgebra A se le llama semisimple, si* $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

Ejemplo 2.9 La MV-álgebra $[0,1]$ es una MV-álgebra semisimple, puesto que el único ideal maximal es $\{0\}$. Recordemos que esta MV-álgebra sólo tiene los ideales triviales, (Ver ejemplo (2.8)).

Ejemplo 2.10 Sea H un espacio topológico Hausdorff compacto, el álgebra de funciones continuas $[0,1]$ valuadas sobre H, denotadas como $\mathcal{A} = \mathrm{Cont}(H)$ es semisimple. En efecto, para $x \in H$ el teorema (2.1.1) afirma que los ideales de $\mathcal{A}$ son de la forma $J_x = \{f \in \mathcal{A} \,:\, f(x) = 0\}$, así $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{x \in H} J_x = \{0\}$.

La proposición que exponemos a continuación nos muestra una correspondencia biunívoca entre las MV-álgebras semisimples y ciertas álgebras de funciones continuas.

Proposición 2.1.5 *Toda MV-álgebra semisimple A es isomorfa a la MV-álgebra* $\mathrm{Cont}\big(\mathbb{H}(A)\big)$.

Demostración. Sea $\lambda_A : A \to \mathrm{Cont}\big(\mathbb{H}(A)\big)$ definida como: $a \to \lambda_A(a)$, donde $\lambda_A(a) : \mathbb{H}(A) \to [0,1]$, $\lambda_A(a)(\alpha) = \alpha(a)$, para todo $\alpha \in \mathbb{H}(A)$. Se prueba facilmente que λ es un MV-homomorfismo.

Afirmamos que para todo $a \in A$, $\lambda(a)$ es una función continua. En efecto, sea U un abierto en $[0,1]$, al tomar imagen inversa, $\lambda(a)^{-1}(U) = \{\alpha \,:\, \alpha(a) \in U\} = W_{a,U}$, vemos que $\lambda(a)^{-1}(U)$ es un abierto de la subbase de $\mathbb{H}(A)$.

Para la inyectividad calculemos su núcleo.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\lambda_A) &= \{a \in A \,:\, \lambda_A(a)(\alpha) = 0,\, \alpha \in \mathbb{H}(A)\} \\
&= \{a \in A \,:\, \alpha(a) = 0,\, \alpha \in \mathbb{H}(A)\} \\
&= \bigcap_{\alpha \in \mathbb{H}(A)} \{a \in A \,:\, \alpha(a) = 0\}.
\end{aligned}$$

Por proposición (2.2.3) todo ideal maximal de A es el núcleo de algún $\alpha \in \mathbb{H}(A)$, entonces

$$\mathrm{Ker}(\lambda_A) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{H}(A)} \mathcal{M}(A),$$

y además A es semisimple, luego $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{H}(A)} \mathcal{M}(A) = \{0\}$, es decir λ es inyectiva.

La sobreyectividad se deduce del teorema (3.6.7) de [6]. ■

La siguiente proposición nos permite ver que en algunos casos el espacio espectral de una MV-álgebra puede describirse fácilmente de manera explícita. Este resultado nos permitirá definir una de las transformacines naturales en el capítulo 3.

Proposición 2.1.6 ([7], Proposición 4.1) *Para todo espacio Hausdorff compacto H y la MV-álgebra* $\mathrm{Cont}(H)$*, la función*

$$\epsilon : H \to \mathbb{H}(\mathrm{Cont}(H)),$$

dada pora $x \in H$ por $\epsilon(x) := e_x : \mathrm{Cont}(H) \to [0,1]$ donde $e_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathrm{Cont}(H)$, es un homeomorfismo.

Demostración. La prueba está dividida en tres pasos:

1. Como $\mathrm{Cont}(H)$ es un álgebra que separa puntos, implica que si $x \neq y$, significa que $f(x) \neq f(y)$, lo que es igual a $e_x(f) \neq e_y(f)$. De donde se concluye que ϵ es inyectiva.

2. Consideremos la aplicación biyectiva φ dada por el teorema (2.1.1) entre el espacio Hausdorff H y el conjunto $\mathcal{M}\big(\mathrm{Cont}(H)\big)$ de los ideales maximales de $\mathrm{Cont}(H)$. De acuerdo a la proposición (2.1.4) existe una aplicación γ entre $\mathcal{M}\big(\mathrm{Cont}(H)\big)$ y $\mathbb{H}\big(\mathrm{Cont}(H)\big)$ biyectiva, por tanto $\gamma \circ \varphi$ es una aplicación biyectiva de H en $\mathbb{H}(A)$, de ahí que ϵ es sobreyectiva.

3. Para todo $f \in \mathrm{Cont}(H)$, se tiene $e_f \circ \epsilon = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}(\mathrm{Cont}(H)) \arrow[r, "e_f"] & {[0,1]} \\ H \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[ur, "e_f \circ \epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

   Garantizando así la continuidad de ϵ en virtud de que la topología de $\mathbb{H}\big(\mathrm{Cont}(H)\big)$ es la menos fina que hace continuas todas las proyecciones. Por la compacidad de $\mathbb{H}\big(\mathrm{Cont}(H)\big)$ tenemos que ϵ es un homeomorfismo.

■

2.2. C^* Álgebras

En 1943 Gelfand y Naimark [14] introducen la noción de C^*-álgebra como un álgebra de Banach con una involución $*$. Ellos mostraron que si tal álgebra es conmutativa, entonces es isomorfa a la C^*-álgebra $\mathcal{C}(H)$ de funciones complejas continuas sobre un espacio compacto Hausdorff H. Los detalles de las propiedades y ejemplos, se pueden consultar en [28] capítulo 11 y [9] capítulo 8.

Definición 2.8 (C^*-álgebra) *Una álgebra Banach X, es una C^*-álgebra si sobre X se ha definido una operación $*: X \to X$, llamada involución, que cumple:*

1*. $(x^*)^* = x$ *Involutividad.*

2*. $(xy)^* = y^* x^*$ *Antimultiplicatividad.*

3*. $(\alpha x + y)^* = \bar{\alpha} x^* + y^*$ *Antilinealidad.*

4*. $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Observación 2.2 La condición (*4**) garantiza que en una C^*-álgebra, la involución preserva la norma y por tanto es continua.

Ejemplo 2.11 El campo $\mathbb{C}$ de los números complejos junto con la involución dada por la conjugación compleja $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ es una C^*-álgebra con unidad.

Ejemplo 2.12 El álgebra de Banach $\mathcal{C}(H)$ de las funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$ definidas en un espacio topológico Hausdorff compacto H no vacío, con la norma de supremo definida por

$$\|f\| = \sup_{s \in H} |f(s)|.$$

Definimos la multiplicación en forma usual: $(fg)(s) = f(s)g(s)$, $s \in H$. Esto convierte a $\mathcal{C}(H)$ en una álgebra de Banach conmutativa con involución $(f(s))^* = \overline{f(s)}$; la función constante 1 es el elemento unidad.

Ejemplo 2.13 Es sabido que si H es un espacio de Hilbert, todo funcional lineal continuo $A: H \to H$ es acotado. Si definimos la norma de A como

$$\|A\| = \sup \{ \|Ax\| : \|x\| \leq 1 \} .$$

se prueba facilmente que la suma y la composición de dos operadores lineales continuos son a su vez continuos y lineales. Para cada $y \in H$ definimos el funcional lineal continuo $T(x) = \langle Ax, y \rangle$, el teorema de representación de Riesz garantiza la existencia un único elemento $A^* y$ tal que $T(x) = \langle x, A^* y \rangle$. Esto es,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \text{ y } \langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle .$$

Definimos entonces otro operador lineal continuo $A^* : H \to H$ llamado el adjunto de A. El conjunto $L(H)$ de los operadores lineales continuos en H, junto con la adición y las operaciones de composición, la norma y el operador adjunto como involución, forman una C^*-álgebra. Éste es el más importante ejemplo de una C^*-álgebra.

Definición 2.9 *Sea X y Y dos C^*-álgebras, se dice que $\Phi : X \to Y$ es:*

- *Un $*$-homomorfismo, si es un homomorfismo de álgebras de Banach que respeta la involución, es decir que $\Phi(x^*) = \Phi^*(x)$.*
- *Un $*$-homomorfismo unidad, es un $*$-homomorfismos que preserva la unidad del álgebra.*

2.2.1. Teorema Gelfand-Naimark

El teorema de Gelfand-Naimark propone que cualquier C^*-álgebra conmutativa, puede verse como la C^*-álgebra que consta de las funciones continuas con valores en $\mathbb{C}$ definidas en un espacio topológico localmente compacto H, denotadas como $\mathcal{C}(H)$. Cuando la C^*-álgebra tiene unidad, este espacio topológico es compacto.

Empezamos mostrando que en algunos casos el espacio de caracteres de un álgebra de Banach puede describirse fácilmente de manera explícita. El siguiente teorema ilustra este hecho. La notación $\mathcal{C}(H)$ representa el conjunto de funciones continuas complejas sobre H.

Teorema 2.2.1 [2], [28] *Sea H un espacio Hausdorff compacto. Los espacios H y $\mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$ son homeomorfos.*

Demostración. Para cada $x \in H$, definimos el caracter $\mathfrak{h}_x : \mathcal{C}(H) \to \mathbb{C}$ como $\mathfrak{h}_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{C}(H)$, probemos que la aplicación

$$\mu : H \to \mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$$

dada por $x \to \mathfrak{h}_x$ es un homeomorfismo.

Empecemos probando que es inyectiva. Sea $x, y \in H$, entonces de la definición de μ, $\mu(x) = \mathfrak{h}_x$ y $\mu(y) = \mathfrak{h}_y$, así, para todo $f \in \mathcal{C}(H)$ tenemos $\mathfrak{h}_x(f) = f(x)$ y $\mathfrak{h}_y(f) = f(y)$, como $\mathcal{C}(H)$ es un álgebra que separa puntos, si $x \neq y$ tenemos que $f(x) \neq f(y)$. Por tanto es inyectiva.

Para probar la sobreyectividad probemos que todo caracter $\mathfrak{h} \in \mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$ es de la forma $\mathfrak{h}_x$, para algún $x \in X$. De no ser así existiría un ideal maximal M de $\mathcal{C}(H)$ tal que $M = \mathrm{Ker}(\mathfrak{h})$ que contendría para cada $p \in H$ una función $f(p) \neq 0$. Como H es compacto, entonces M ha de contener un número finito de funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ siendo almenos una de ellas distinta de cero en cada punto de H.

Sea $g = f_1\overline{f}_1 + ... + f_n\overline{f}_n$, entoces $g \in M$, ya que M es ideal; $g > 0$ en cada punto de H, luego g es invertible en $\mathcal{C}(H)$, pero los ideales propios no tienen elementos invertibles, por tanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_x$, para algún $x \in H$.

Así la aplicación

$$\mu : \ H \longrightarrow \mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$$
$$x \longmapsto \mathfrak{h}_x$$

donde $\mathfrak{h}_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$, es biyectiva.

Además, para todo $f \in \mathcal{C}(H)$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Char}(\mathcal{C}(H)) \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathbb{C} \\
H \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\hat{f}\circ\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{f} \circ \mu = f$. Esto garantiza la continuidad de μ en virtud de que la topoloqía de $\mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$ es la menos fina que hace todas $\hat{f}$ continuas. Usando la compacidad de $\mathrm{Char}(\mathcal{C}(H))$ se concluye que μ es un homeomorfismo. ■

Para enunciar y demostrar el teorema de Gelfand-Naimark, resulta conveniente presentar primero los siguientes lemas [30].

Lema 2.2.1 *Sea X una C^*-álgebra conmutativa con unidad. Si $x \to x^*$ define una involución de X, entonces $1^* = 1$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
1^* &= 1 \cdot 1^* \text{ porque para toda } x \in X,\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \\
&= 1^{**} \cdot 1^* \text{ involutividad, propiedad } \mathit{1}^*\text{. de la definición (2.8)} \\
&= \left(1 \cdot 1^*\right)^* \text{ antimultiplicatividad, propiedad } \mathit{2}^*\text{. de la definición (2.8)} \\
&= (1^*)^* \text{ para toda } x \in X\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \\
&= 1 \text{ involutividad.}
\end{aligned}$$

■

Lema 2.2.2 *Sean X una C^*-álgebra conmutativa y $x \in X$, entonces se cumple que*

$$\left\|x^2\right\| = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad \|x\| = \|x^*\| .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left\|x^2\right\|^2 &= \left\|(x^2)^* x^2\right\| \quad \text{por propiedad } 4^* \text{ de la definición (2.8)} \\
&= \|(xx)^*(xx)\| \\
&= \|x^* x^* xx\| \quad \text{por } 2^* \\
&= \|(x^*x)(x^*x)\| \quad \text{conmutatividad y asociatividad} \\
&= \|x^*x\| \, \|x^*x\| \quad \text{propiedad de } \| \, \| \\
&= \|x^*x\|^2 \\
&= \|x\|^4 \quad \text{por } 4^*.
\end{aligned}$$

Luego $\|x^2\| = \|x\|^2$. De la misma forma se tiene

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|x^* \cdot x\| \quad \text{propiedad } 4^* \\
&= \|x \cdot x^*\| \quad \text{conmutatividad} \\
&= \|x^{**} \cdot x^*\| \quad \text{involutividad} \\
&= \|(x^*)^* \cdot (x^*)\| \quad \text{asociatividad} \\
&= \|x^*\|^2 \quad \text{propiedad } 4^*
\end{aligned}$$

por lo que $\|x\| = \|x^*\|$. ■

Lema 2.2.3 [24] *Sea X una C^*-álgebra conmutativa.*

1. *Si $x \in X$ satisface $x^* = x^{-1}$, entonces la transformada de Gelfand de x tiene módulo 1, es decir $|\widehat{x}| = 1$.*

2. *Si $y \in X$ satisface $y^* = y$, entonces $\widehat{y}$ es real.*

Demostración. Sea $x^* = x^{-1}$, entonces al aplicar involución en los dos lados, $(x^{-1})^* = (x^*)^*$, ahora por la propiedad 4^* de la definición (2.8) se tiene, $(x^{-1})^* = x$. Así es

$$1 = \|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{y} \quad 1 = \left\|(x^{-1})^* x^{-1}\right\| = \left\|x^{-1}\right\|^2 ,$$

luego $\mathrm{Sp}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \cdot 1 \text{ es no invertible}\}$ y $\mathrm{Sp}(x^{-1})$ están contenidos en el disco unidad $B(x, 1)$, lo cual sólo sucede cuando $|\lambda| = 1$, para todo $\lambda \in \mathrm{Sp}(x)$, es decir cuando $\hat{x}$ tiene módulo 1.

Ahora si z pertenece a cualquier álgebra de Banach, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge a un elemento e^z que satisface

$$\begin{aligned} \widehat{e^z} &= \widehat{(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{z}^n}{n!} \\ &= e^{\hat{z}}. \end{aligned}$$

Además e^z es invertible y su inverso es e^{-z}, así, la involución $z \to z^*$ es continua, por el lema(2.2.2). Luego, para $z \in X$ se tiene

$$(e^z)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{n!} = e^{z^*}.$$

Sea $y^* = y$ y $x = e^{iy}$, entonces

$$x^* = e^{-iy^*} = e^{-iy} = x^{-1},$$

como $\mathrm{Sp}(x) \subseteq B(x, 1)$, se tiene que $\mathrm{Sp}(y)$ es real. ∎

Además de los resultados citados anteriormente, para la prueba del teorema de Gelfand-Naimark necesitaremos el Teorema de Stone-Weierstrass [28] el cual enunciamos a continuación. Recordemos que si E es un espacio topológico, el símbolo $\mathcal{C}(E)$ representa el conjunto de funciones continuas $f : E \to \mathbb{C}$.

Teorema 2.2.2 (Stone-Weierstrass) *Sea (E, τ) un espacio vectorial topológico compacto y Hausdorff. Si $A \subseteq \mathcal{C}(E)$ es una subálgebra que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Las funciones constantes pertenecen a A.*
2. *Si $f \in A$ entonces, $\overline{f} \in A$.*
3. *Si $x, y \in E$ son tales que $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{C}(E)$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Entonces, $\overline{A} = \mathcal{C}(E)$; es decir, A es densa en $\mathcal{C}(E)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Debido a la importancia que represente el teorema de Gelfand-Naimark en este trabajo y dado que su demostración reúne muchos de los conceptos estudiados e introducidos hasta ahora, vemos conveniente reescribir su prueba. Este resultado nos permitirá definir una de las transformaciones naturales requeridas para alcanzar nuestro objetivo.

Teorema 2.2.3 (Gelfand-Naimark) [9] *Para cada C^*-álgebra conmutativa X con unidad, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico entre X y* $\mathcal{C}(\mathrm{Char}(X))$.

Demostración. Por la proposición (1.3.2) y el lema (2.2.2), la transformada de Gelfand es una isometría de X sobre la subálgebra cerrada $\widehat{X} = \{\widehat{x} : x \in X\}$ de $\mathcal{C}\big(\mathrm{Char}(X)\big)$.
Para $x \in X$, sean

$$y = \frac{x + x^*}{2} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y + iz &= \frac{x + x^*}{2} + \cancel{i}\frac{x - x^*}{2\cancel{i}} \\ &= x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^* = \Big(\frac{x + x^*}{2}\Big)^* &= \frac{x^* + x^{**}}{2} \\ &= \frac{x^* + x}{2} = y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z^* = \Big(\frac{x - x^*}{2i}\Big)^* &= \frac{x^* - x}{(2i)^*} \\ &= \frac{x^* - x}{\overline{2i}} = \frac{x^* - x}{-2i} \\ &= \frac{x - x^*}{2i} = z. \end{aligned}$$

Así $x^* = y^* - iz^*$. Al aplicar el lema(2.2.3), se tiene $x^* = y - iz$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \widehat{x^*} &= \widehat{y - iz} \\ &= \widehat{\overline{x}} \\ &= \overline{\widehat{x}}. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que en particular, si $\widehat{x} \in \widehat{X}$, entonces el conjugado complejo $\overline{\widehat{x}}$ de $\widehat{x}$ también está en $\widehat{X}$.

Como $\widehat{X} = \{\widehat{x} : x \in X\} \subset \mathcal{C}\big(\mathrm{Char}(X)\big)$ es una subálgebra que contiene a las funciones constantes, porque para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene

$$(\widehat{\lambda \mathbf{1}})(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}(\lambda \mathbf{1}) = \lambda \mathfrak{h}(\mathbf{1}) = \lambda.$$

Por último se observa que si $h_1 \neq h_2$, existe y tal que $h_1(y) \neq h_2(y),$ entonces $\widehat{X}$ es una subálgebra que cumple con las condiciones del teorema (2.2.2), por tanto $\widehat{X}$ debe coincidir con $\mathcal{C}\big(\mathrm{Char}(X)\big)$. Completando así la demostración. ∎

Capítulo 3

Dualidad Gelfand-Priestley

En este capítulo analizaremos los funtores $\mathbb{H}$ y Char de las dualidades establecidas en [7] (proposición (4.2)) y la dualidad de Gelfand en [27], posteriormente presentaremos una equivalencia dual entre la categoría de $MVS[0,1]$ de las MV-álgebras semisimples y la categoría $C^*(\mathbb{C})$ de las álgebras de Banach con involución.

3.1. Dualidad entre $MVS[0,1]$ y $C^*(\mathbb{C})$

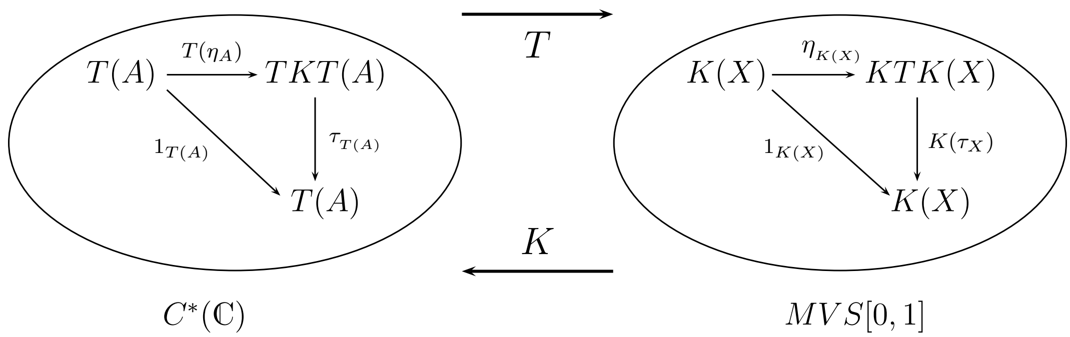
Nuestro objetivo es estudiar los funtores **Char** de [27] y $\mathbb{H}$ de[7] para definir los funtores

$$\boldsymbol{K} : C^*(\mathbb{C}) \longrightarrow MVS\,[0,1] \quad \text{y} \quad \boldsymbol{T} : MVS\,[0,1] \longrightarrow C^*(\mathbb{C}),$$

y las transformaciones naturales

$$\eta : \boldsymbol{1}_{MVS[0,1]} \longrightarrow \boldsymbol{KT} \quad \text{y} \quad \tau : \boldsymbol{TK} \longrightarrow \boldsymbol{1}_{C^*(\mathbb{C})}$$

de modo que (T, K, η, τ) establezcan una equivalencia dual entre las categorías $MVS\,[0,1]$ y $C^*(\mathbb{C})$, como se muestra en la figura siguiente.



Equivalencia dual

3.2. Los Funtores K y T

3.2.1. El funtor K

Incluimos el funtor **Char** de la dualidad de Gelfand [27], el cual va de la categoría $C^*(\mathbb{C})$ de las álgebras C^* sobre $\mathbb{C}$, a la categoría **Hauss** de los espacios Hausdorff compactos, esto es,

$$\mathbf{Char} : C^*(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbf{Hauss},$$

para $X \in C^*(\mathbb{C})$ se tiene $\mathbf{Char}(X) = \{\mathfrak{h} : X \to \mathbb{C}\,,\, \mathfrak{h} \text{ homomorfismo complejo}\}$ es un espacio Hausdorff compacto (teorema 1.3.3), y si $\Phi : X \to Y$ es un homomorfismo, entonces

$$\mathbf{Char}(\Phi) : \mathbf{Char}(Y) \to \mathbf{Char}(X),$$

para todo $\mathfrak{g} \in \mathbf{Char}(Y)$, $\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \circ \Phi$.

Veamos que **Char** es contravariante: sean $\Phi : X \to Y$ y $\Omega : Y \to Z$ morfismos en $C^*(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{l} \in \mathbf{Char}(Z)$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "\Omega\circ\Phi"'] & Y \arrow[r, "\Omega"] & Z \arrow[r, "\mathfrak{l}"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Char}(\Omega \circ \Phi)(\mathfrak{l}) &= \mathfrak{l} \circ (\Omega \circ \Phi), \quad \text{definición de } \mathbf{Char}(\Phi \circ \Omega) \\
&= (\mathfrak{l} \circ \Omega) \circ \Phi, \quad \text{asociatividad en } C^*(\mathbb{C}) \\
&= \mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{l} \circ \Omega), \quad \text{definición de } \mathbf{Char}(\Phi) \\
&= \mathbf{Char}(\Phi)\big(\mathbf{Char}(\Omega)(\mathfrak{l})\big), \quad \text{definición de } \mathbf{Char}(\Omega) \\
&= \big(\mathbf{Char}(\Phi) \circ \mathbf{Char}(\Omega)\big)(\mathfrak{l}), \quad \text{definición de compuesta.}
\end{aligned}$$

Luego $\mathbf{Char}(\Omega \circ \Phi) = \mathbf{Char}(\Phi) \circ \mathbf{Char}(\Omega)$, o sea:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Char}(Y) \arrow[r, "\mathbf{Char}(\Phi)"] & \mathbf{Char}(X) \\
\mathbf{Char}(Z) \arrow[u, "\mathbf{Char}(\Omega)"] \arrow[ur, swap, "\mathbf{Char}(\Phi)\circ\mathbf{Char}(Z)"] &
\end{tikzcd}$$

Además, $\mathbf{Char}$ preserva identidad. Sea $1_X : X \to X$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Char}(1_X)(\mathfrak{h}) = \mathbf{Char}(1_X)(\mathfrak{h}) &= (\mathfrak{h} \circ 1_X) \;\; \text{definición de } \mathbf{Char}(1_X) \\
&= \mathfrak{h} \\
&= 1_{\mathbf{Char}(X)}(\mathfrak{h}).
\end{aligned}$$

Concluimos, $\mathbf{Char}(1_X) = 1_{\mathbf{Char}(X)}$. Definimos entonces el funtor,

$$\boxed{K \,:\, C^*(\mathbb{C}) \longrightarrow MVS[0,1].}$$

Puesto que $K(X) = \{f : \mathbf{Char}(X) \to [0,1] \,:\, f \text{ es continua}\}$ para $X \in C^*(\mathbb{C})$, es claro que K está bien definido, en efecto $K(X)$ es una MV-álgebra con las operaciones definidas puntualmente; para todo $\mathfrak{h} \in \mathbf{Char}(X)$ y todas $f_1,\ f_2 \in K(X)$ se tiene que

$$(f_1 \oplus f_2)(\mathfrak{h}) = f_1(\mathfrak{h}) \oplus f_2(\mathfrak{h}) \;\text{ y }\; (\neg f_1)(\mathfrak{h}) = \neg(f_1(\mathfrak{h})).$$

Adicionalmente, $0_{K(X)} : \mathbf{Char}(X) \to [0,1]$ está dado por $0_{K(X)}(\mathfrak{h}) = 0$. El ejemplo (2.10) nos muestra que $K(X)$ es semisimple.

Si $\Phi : X \to Y$ es un $*$-homomorfismo y $f \in K(X)$, entonces la aplicación de MV-álgebras , $K(\Phi) : K(X) \to K(Y)$ definida por, $K(\Phi)(f) = f \circ \mathbf{Char}(\Phi)$, es un MV-homomorfismo. En efecto,

1. Dada $0_{K(X)} : \mathbf{Char}(X) \to [0,1]$ la función constante cero. Sea $\mathfrak{g} \in \mathbf{Char}(Y)$

$$\begin{aligned}
K(\Phi)\big(0_{K(X)}\big)(\mathfrak{g}) &= \big(0_{K(X)} \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g}), \;\; \text{definición de } K(\Phi) \\
&= 0_{K(X)}\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big), \;\; \text{composición de funciones} \\
&= 0, \;\;\; \text{porque } 0_{K(X)} \text{ es la función constante cero.}
\end{aligned}$$

2. Sean $f_1,\ f_2 \in K(X)$, y $\mathfrak{g} \in \mathbf{Char}(Y)$, por definicion de $K(\Phi)$ tenemos que,

   $K(\Phi)(f_1 \oplus f_2) = (f_1 \oplus f_2) \circ \mathbf{Char}(\Phi)$.

De otro lado $K(\Phi)(f_1) \oplus K(\Phi)(f_2) = \big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big) \oplus \big(f_2 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)$. Afirmamos que $\big(f_1 \oplus f_2\big) \circ \mathbf{Char}(\Phi) = \big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big) \oplus \big(f_2 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\big[(f_1 \oplus f_2) \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big](\mathfrak{g}) &= (f_1 \oplus f_2)\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big) \\
&= f_1\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big) \oplus f_2\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big) \\
&= \big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g}) \oplus \big(f_2 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$K(\Phi)\big(f_1 \oplus f_2\big) = K(\Phi)(f_1) \,\oplus\, K(\Phi)(f_2).$$

3. Igualmente de la definición de K, $K(\Phi)(\neg f_1) = (\neg f_1) \circ \mathbf{Char}(\Phi)$, por el otro lado

$$\neg K(\Phi)(f_1) = \neg\big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big).$$

$$\begin{aligned}
\big((\neg f_1) \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g}) &= (\neg f_1)\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big) \\
&= \neg\Big(f_1\big(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g})\big)\Big) \\
&= \neg\Big(\big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g})\Big) \\
&= \neg\big(f_1 \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g}),
\end{aligned}$$

luego $K(\Phi)(\neg f_1) = \neg K(\Phi)(f_1)$.

De 1, 2 y 3 $K(\Phi)$ es un morfismo en $MVS[0,1]$.

Ahora observemos que K respeta la composición de morfismos: sean $\Phi : X \to Y$, $\Omega : Y \to Z$ $*$-homomorfismos y $f \in K(X)$. Por definición de K

$$K\big(\Omega \circ \Phi\big)(f) = f \circ \mathbf{Char}(\Omega \circ \Phi),$$

y

$$\begin{aligned}
\Big(K(\Omega) \circ K\big(\Phi\big)\Big)(f) &= K(\Omega)\Big(K\big(\Phi\big)(f)\Big), \quad \text{composición} \\
&= K(\Omega)\Big(f \circ \mathbf{Char}(\Phi)\Big), \quad \text{definición de } K(\Phi) \\
&= \big(f \circ \ \mathbf{Char}(\Phi)\big) \circ \ \mathbf{Char}(\Omega), \quad \text{definición de } K(\Omega) \\
&= f \circ \big(\ \mathbf{Char}(\Phi) \circ \mathbf{Char}(\Omega)\big), \quad \text{asociatividad de composición} \\
&= f \circ \ \mathbf{Char}(\Omega \circ \Phi), \quad \mathbf{Char} \text{ es contravariante} \\
&= K\big(\Omega \circ \Phi\big)(f), \quad \text{definición de } K(\Omega \circ \Phi).
\end{aligned}$$

En consecuencia K es un funtor covariante.

En resumen:

$$K : C^*(\mathbb{C}) \longrightarrow MVS[0,1]$$

$$\begin{array}{ccl} X & \longmapsto & \{f : \mathrm{Char}(X) \to [0,1] \;/\; f\text{-continua}\} \\ X & & \\ \Phi \big\downarrow & \longmapsto & \begin{array}{rcl} K(\Phi) : K(X) & \to & K(Y) \\ f & \mapsto & f \circ \mathrm{Char}(\Phi) \end{array} \\ Y & & \end{array}$$

3.2.2. El funtor T

Análogo al funtor anterior, presentamos primero el funtor $\mathbb{H}$ de la proposición (4.2) en [7], que se define de la categoría de las MV-álgebras semisimples, $MVS[0,1]$, a la categoría **Hauss**. Es decir,

$$\mathbb{H} : MVS[0,1] \to \mathbf{Hauss}$$

donde una MV-álgebra A se envía a el espacio Hausdorff estudiado en la sección (2.1.3), $\mathbb{H}(A) = \{\alpha : A \to [0,1] \;:\; \alpha : MV - \text{homomorfismo}\}$. Y la imagen de $f : A \to B$ un MV-homomorfismo es $\mathbb{H}(f) : \mathbb{H}(B) \to \mathbb{H}(A)$, definido por $\mathbb{H}(f)(\beta) = \beta \circ f$. La prueba que es un funtor contravariante es análoga a la del funtor **Char**, a pesar de ello verificaremos composición. Para $f : A \to B$, $g : B \to C$ MV-homomorfismos y $\lambda \in \mathbb{H}(C)$, se tiene

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "\lambda"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{H}(g \circ f)(\lambda) & = & \lambda \circ (g \circ f), & \text{definición de } \mathbb{H}(\Phi \circ \Omega) \\ & = & (\lambda \circ g) \circ f, & \text{asociatividad en } MVS[0,1] \\ & = & \mathbb{H}(f)(\lambda \circ g), & \text{definición de } \mathbb{H}(f) \\ & = & \mathbb{H}(f)\big(\mathbb{H}(g)(\lambda)\big), & \text{definición de } \mathbb{H}(g) \\ & = & \big(\mathbb{H}(f) \circ \mathbb{H}(g)\big)(\lambda), & \text{definición de compuesta.} \end{array}$$

De donde $\mathbb{H}(g \circ f) = \mathbb{H}(f) \circ \mathbb{H}(g)$.

$\mathbb{H}$ preserva identidad: sea $1_A : A \to A$, $\alpha \in \mathbb{H}(A)$ y $a \in A$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}(1_A)(\alpha)(a) & = & (\alpha \circ 1_A)(a) \\ & = & \alpha(1_A(a)) \\ & = & \alpha(a) \\ & = & 1_{\mathbb{H}(A)}(\alpha(a)). \end{array}$$

Ahora exponemos el funtor

$$\boxed{T\ :\ MVS[0,1] \longrightarrow C^*(\mathbb{C})},$$

para $A \in MVS[0,1]$, $T(A) = \{\Phi : \mathbb{H}(A) \to \mathbb{C}\ :\ \Phi \text{ continua}\}$, del ejemplo (2.4.2) al dotar a $T(A)$ con la norma del supremo

$$\|\Phi\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{H}(A)} |\Phi(\alpha)|\,.$$

la multiplicación puntual de funciones

$$(\Phi_1\Phi_2)(\alpha) = \Phi_1(\alpha)\Phi_2(\alpha), \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{H}(A),$$

la función constante 1(uno) como unidad y la involución *, el conjugado complejo. Por ello $T(A)$ es un álgebra de Banach C^* sobre $\mathbb{C}$.

Si $f : A \to B$ es un $MV-$homomorfismo y $\Phi \in T(A)$ entonces $T(f) : T(A) \to T(B)$ donde $T(f)(\Phi) = \Phi \circ \mathbb{H}(f)$

1	$T(f)\big(\Phi_1 + \Phi_2\big) = \big(\Phi_1 + \Phi_2\big) \circ \mathbb{H}(f)$ $= \Phi_1 \circ \mathbb{H}(f) + \Phi_2 \circ \mathbb{H}(f)$ $= T(f)\big(\Phi_1\big) + T(f)\big(\Phi_2\big)$	definición de $T(f)$ definición de suma y compuesta definición de $T(f)$.
2	$T(f)\big(\Phi_1 + \Phi_2\big) = \big(\Phi_1 + \Phi_2\big) \circ \mathbb{H}(f)$ $= \Phi_1 \circ \mathbb{H}(f) + \Phi_2 \circ \mathbb{H}(f)$ $= T(f)\big(\Phi_1\big) + T(f)\big(\Phi_2\big)$	definición de $T(f)$ definición de suma y compuesta definición de $T(f)$.
3	Sea $1 : \mathbb{H}(A) \to [0,1]$ la función constante uno.	$T(f)(1) = 1 \circ \mathbb{H}(f)$ $= 1(\mathbb{H}(f))$ $= 1$

De 1, 2 y 3, $T(f)$ es un $*$-homomorfismo en $C^*(\mathbb{C})$. Siendo así, T está bien definido tanto para objetos como para morfismos.

Verifiquemos que T es un funtor covariante,

I. Consideremos el MV-homomorfismo identidad $1_A : A \to A$ y veamos que $T(1_A)$ es el morfismo identidad $1_{T(A)}$. Sean $A \in MVS[0,1]$, $\Phi \in T(A)$ y $\alpha \in \mathbb{H}(A)$.

$$\begin{aligned} T\big(1_A\big)(\Phi)(\alpha) &= \big(\Phi \circ \mathbb{H}(1_A)\big)(\alpha) \\ &= \Phi\big(\mathbb{H}(1_A)(\alpha)\big) \\ &= \Phi(\alpha). \end{aligned}$$

Así, $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

II. Para finalizar se muestra que T respeta composición de morfismos, sea $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $\Theta \in T(C)$, por definición de T se tiene, $T(g \circ f)(\Theta) = \Theta \circ \mathbb{H}(g \circ f)$, además:

$$\begin{aligned}
\big(T(g) \circ T(f)\big)(\Theta) &= T(g)\big(T(f)(\Theta)\big), \text{ definición de compuesta} \\
&= T(g)\big(\Theta \circ \mathbb{H}(f)\big), \text{ definición de } T \\
&= (\Theta \circ \mathbb{H}(f)) \circ \mathbb{H}(g), \text{ definición de } T \\
&= \Theta \circ \big(\mathbb{H}(f) \circ \mathbb{H}(g)\big) \text{ asociación de la composición} \\
&= \Theta \circ \mathbb{H}(g \circ f), \ \mathbb{H} \text{ es contravariante} \\
&= T\big(g \circ f\big)(\Theta).
\end{aligned}$$

En consecuencia de I y II, T es un funtor covariante.

Resumimos el funtor T, con lo siguiente

$$\begin{array}{ccl}
T : MVS[0,1] & \longrightarrow & C^*(\mathbb{C}) \\
A & \longmapsto & \{\Phi : \mathbb{H}(A) \to \mathbb{C} \text{ / } \Phi\text{-continua}\} \\
A \\ f \big\downarrow \\ B & \longmapsto & \begin{array}{rcl} T(f) : T(A) & \to & T(B) \\ \Phi & \mapsto & \Phi \circ \mathbb{H}(f) \end{array}
\end{array}$$

3.3. Las Transformaciones Naturales η y τ

Ya contamos con los funtores adecuados y bases suficientes para definir las tranformaciones naturales $\eta : 1_{MVS[0,1]} \to KT$ y $\tau : TK \to 1_{C^*(\mathbb{C})}$ de tal forma que $\langle K, T, \eta, \tau \rangle$ establezcan una equivalencia dual entre la categoria de la MV-álgebras semisimples y la categoría de las C^*-álgebras sobre $\mathbb{C}$.

3.3.1. Transformación η

Para $A \in MVS[0,1]$, se concluyó en la sección (2.1.3) que $\mathbb{H}(A)$ es Hausdorff compacto; con este espacio, el teorema (2.2.1) nos dice que la aplicación $\mu_{\mathbb{H}(A)} : \mathbb{H}(A) \to \mathrm{Char}\big(\mathcal{C}(\mathbb{H}(A))\big)$ definida como $\alpha \mapsto \mathfrak{h}_\alpha$ es un homeomorfismo, además de la definición de T se tiene que $\mathbf{Char}\big(\mathcal{C}(\mathbb{H}(A))\big) = \mathbf{Char}(T(A))$, de esta manera consideremos η la familia de MV-morfismos entre MV-álgebras.

$$\Big\{\eta_A : A \to K\big(T(A)\big)\Big\}_{A \in MVS[0,1]}$$

por

$$\begin{array}{rlcl} \eta_A : & A & \longrightarrow & K(T(A)) \\ & a & \longmapsto & \eta_A(a) : \mathbf{Char}(T(A)) \longrightarrow [0,1] \\ & & & \qquad\qquad \mathfrak{h}_\alpha \quad \longmapsto \alpha(a) \end{array}$$

Mostremos que η es una familia de MV-homomorfismos. Esto es, para toda MV-álgebra A, η_A es un MV-homomorfismo. Sean $a, b \in A$ y $\mathfrak{h}_\alpha \in \mathbf{Char}(T(A))$,

1	$\eta_A(a \oplus b)(\mathfrak{h}_\alpha) = \alpha(a+b)$, definición de η_A $= \alpha(a) \oplus \alpha(b)$, α es MV-homomorfismo $= \eta_A(a) \oplus \eta_A(b)$, definición de η_A.
2	$\eta_A(0_A)(\mathfrak{h}_\alpha) = \alpha(0_A)$ definición de $\eta_A(0_A)$ $= 0$, α es un MV-homomorfismo.
3	$\eta_A(\neg a)(\mathfrak{h}_\alpha) = \alpha(\neg a)$ definición de η_A $= \neg\alpha(a)$ α es un MV-homomorfismo.

de 1, 2 y 3 η_A, es un MV-homomorfismo.

Evidenciemos que η es una transformación natural, esto es equivalente a probar que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & KT(A) \arrow[d, "KT(f)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"] & KT(B) \end{tikzcd}$$

lo cual a su vez es equivalente a mostrar que $KT(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ f$. Para $a \in A$ $(\eta_B \circ f)(a) = \eta_B(f(a))$, y $\mathfrak{h}_\beta \in \mathrm{Char}\big(T(B)\big)$, resulta $\eta_B(f(a))(\mathfrak{h}_\beta) = \beta(f(a))$.

$$\begin{aligned} (KT(f) \circ \eta_A)(a) &= KT(f)(\eta_A(a)) \\ &= \eta_A(a) \circ \mathrm{Char}(T(f)). \end{aligned}$$

Para el otro lado, $\mathfrak{h}_\beta \circ T(f) = \mathfrak{h}_{\beta \circ f}$. En efecto, sea el MV-homomorfismo $f : A \to B$, usando los funtores $\mathbb{H}$ y T tenemos las funciones $\mathbb{H}(f) : \mathbb{H}(B) \to \mathbb{H}(A)$ y $T(f) : T(A) \to T(B)$. Ahora aplicando el funtor **Char** a $T(f)$ se logra

$$\mathbf{Char}(T(f)) : \mathbf{Char}(T(A)) \to \mathbf{Char}(T(B)),$$

además por el teorema (2.2.1), los espacios $\mathbb{H}(A)$ y $\mathbb{H}(B)$ son homeomorfos a $\mathbf{Char}(T(A))$ y $\mathbf{Char}(T(B))$ respectivamente, lo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}(B) & \xrightarrow{\mathbb{H}(f)} & \mathbb{H}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbb{H}(B)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbb{H}(A)}} \\ \mathbf{Char}(T(B)) & \xrightarrow{\mathbf{Char}(\mathrm{T(f)})} & \mathbf{Char}(T(A)) \end{array}$$

es decir, $\mu_{_{\mathbb{H}(A)}} \circ \mathbb{H}(f) = \mathbf{Char}(T(f)) \circ \mu_{_{\mathbb{H}(B)}}$. La igualdad anterior, nos dice que si $\beta \in \mathbb{H}(B)$

1	$\big(\mu_{_{\mathbb{H}(A)}} \circ \mathbb{H}(f)\big)(\beta) = \mu_{_{\mathbb{H}(A)}}(\mathbb{H}(f)(\beta))$	compuesta
	$= \mu_{_{\mathbb{H}(A)}}(\beta \circ f)$	definición de $\mathbb{H}$
	$= \mathfrak{h}_{\beta \circ f}$	definición de μ.
2	$\big(\mathbf{Char}(\mathrm{T(f)}) \circ \mu_{_{\mathbb{H}(B)}}\big)(\beta) = \mathbf{Char}(\mathrm{T(f)})\big(\mu_{_{\mathbb{H}(B)}}(\beta)\big)$	compuesta
	$= \mathbf{Char}(\mathrm{T(f)})(\mathfrak{h}_\beta)$	definición de μ
	$= \mathfrak{h}_\beta \circ T(f)$	definición de **Char**.

concluimos $\mathfrak{h}_{\beta \circ f} = \mathfrak{h}_\beta \circ T(f)$. Ahora, para $\mathfrak{h}_\beta \in \mathrm{Char}\big(T(A)\big)$

$$\begin{aligned} \big(\eta_A(a) \circ \mathrm{Char}(T(f))\big)(\mathfrak{h}_\beta) &= \eta_A(a)\big(\mathrm{Char}(T(f))(\mathfrak{h}_\beta)\big) \text{ compuesta} \\ &= \eta_A(a)\big(\mathfrak{h}_\beta \circ T(f)\big) \text{ definición de } K, \\ &= \eta_A(a)(\mathfrak{h}_{\beta \circ f}) \\ &= (\beta \circ f)(a) \text{ definición de } \eta \\ &= \beta(f(a)). \end{aligned}$$

Hemos probado que η es una transformación natural.

Mostremos finalmente que η es biyectiva.

- Las MV-álgebras A y $KT(A)$ son equipotentes. Por el teorema (2.1.5) A es isomorfa a $\mathrm{Cont}(\mathbb{H}(A))$, y del teorema (2.2.1) el espacio $\mathbb{H}(A)$ es homeomorfo a $\mathbf{Char}(\mathcal{C}(\mathbb{H}(A)))$, así las MV-álgebras de funciones continuas $\mathrm{Cont}(\mathbb{H}(A))$ y $\mathrm{Cont}\Big(\mathbf{Char}(\mathcal{C}(\mathbb{H}(A)))\Big)$ son equipotentes. Luego, A es equipotente con $KT(A)$, que es $\mathrm{Cont}\Big(\mathbf{Char}(\mathcal{C}(\mathbb{H}(A)))\Big)$.

- η_A es inyectiva. Calculando su núcleo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\eta_A) &= \{a \in A : \eta_A(a)(\mathfrak{h}_\alpha) = 0,\ \mathfrak{h}_\alpha \in \mathbf{Char}\big((T(A))\big)\}\\ &= \{a \in A : \alpha(a) = 0,\ \alpha \in \mathbb{H}(A)\}\\ &= \bigcap_{\alpha\in\mathbb{H}(A)} \{a \in A : \alpha(a) = 0\}.\end{aligned}$$

Se sabe que para $\alpha \in \mathbb{H}(A)$, $\mathrm{Ker}(\alpha)$ es un ideal maximal de A (proposición (2.1.4)), entonces

$$\mathrm{Ker}(\eta_A) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{H}(A)} \mathcal{M}(A),$$

y además A es semisimple, luego $\mathrm{Ker}(\eta_A) = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{H}(A)} \mathcal{M}(A) = \{0\}$, es decir η_A es inyectiva. Así, tenemos que η es biyectiva.

Por tanto η es un isomorfismo natural.

3.3.2. Transformación τ

En la transformación τ, apoyándonos en el hecho de la observación (1.1) ilustraremos el isomorfismo natural τ^{-1}.

Sea $X \in C^*(\mathbb{C})$, por el teorema (1.3.3) $\mathrm{Char}(X)$ es Hausdorff compacto, la proposición (2.1.6) nos dice que tenemos el homeomorfismo

$$\epsilon_{\mathrm{Char}(X)} : \mathrm{Char}(X) \to \mathbb{H}(\mathcal{C}(\mathrm{Char}(X))),$$

dada por $\mathfrak{h} \mapsto \alpha_{\mathfrak{h}}$. Por la definición de K, $\mathbb{H}(K(X)) = \mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathrm{Char}(X)))$, así disponemos de la familia τ^{-1} de $*$-homomorfismos entre C^*-álgebras,

$$\left\{\tau_X^{-1} : X \to T\big(K(X)\big)\right\}_{X\in C^*(\mathbb{C})}$$

por

$$\begin{array}{rccccc}\tau_X^{-1}: & X & \longrightarrow & T(K(X)) & & \\ & x & \longmapsto & \tau_X^{-1}(x): \ \mathbb{H}(K(X)) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & & & \alpha_{\mathfrak{h}} & \longmapsto & \mathfrak{h}(x)\end{array}$$

Sea $X \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$, τ_X^{-1} es un $*$-homomorfismo. En efecto, $x, y \in X$ y $\alpha_{\mathfrak{h}} \in \mathbb{H}(K(X))$

1	$\tau_X^{-1}(x+y)(\alpha_{\mathfrak{h}})$	$=\mathfrak{h}(x+y)$ $=\mathfrak{h}(x)+\mathfrak{h}(y)$	definición de τ^{-1} $\mathfrak{h}$ es un $*$-homomorfismo
2	$\tau_X^{-1}(x\cdot y)(\alpha_{\mathfrak{h}})$	$=\mathfrak{h}(x\cdot y)$ $=\mathfrak{h}(x)\cdot\mathfrak{h}(y)$	definición de τ^{-1} $\mathfrak{h}$ es u $*$-homomorfismo
3	$\tau_X^{-1}(x^*)(\alpha_{\mathfrak{h}})$	$=\mathfrak{h}(x^*)$ $=(\mathfrak{h}(x))^*$ $=\mathfrak{h}^*(x)$	definición de τ^{-1} $\mathfrak{h}$ es u $*$-homomorfismo
4	Sea 1 la unidad del álgebra X, $\tau_X^{-1}(1)(\alpha_{\mathfrak{h}})$	$=\mathfrak{h}(1)$ $=1$	definición de τ^{-1} por lema (1.3.1)

Los items 1 al 4 prueban la afirmación.

Mostremos que τ^{-1} es transformación natural, esto es, probar que el diagrama siguiente es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_X^{-1}"] \arrow[d, "\Phi"'] & TK(X) \arrow[d, "TK(\Phi)"] \\ Y \arrow[r, "\tau_Y^{-1}"] & TK(Y) \end{tikzcd}$$

lo cual es equivalente a tener que

$$TK(\Phi)\circ\tau_X^{-1}=\tau_Y^{-1}\circ\Phi. \tag{3.1}$$

Para el lado derecho de la ecuación (3.1): Si $x\in X,\ (\tau_Y^{-1}\circ\Phi)(x)=\tau_Y^{-1}(\Phi(x)).$ Se puede

notar que

$$\tau^{-1_Y}\circ\Phi:\mathbb{H}(K(Y))\to\mathbb{C},$$

por tanto si $\beta_{\mathfrak{g}}\in\mathbb{H}\big(K(Y)\big)$, se tiene $\tau_Y^{-1}(\Phi(x))(\beta_{\mathfrak{g}})=\mathfrak{g}(\Phi(x))$.

Para la parte izquierda de la igualdad (3.1), mostremos primero que $\beta_{\mathfrak{g}}\circ K(\Phi)=\beta_{\mathfrak{g}\circ\Phi}$. En efecto: dado el $*$-homomorfismo $\Phi:X\to Y$, aplicando el funtor **Char** se logra la función

$$\mathbf{Char}(\Phi):\mathbf{Char}(Y)\to\mathbf{Char}(X), \tag{3.2}$$

utilizando el funtor $\mathbb{H}$ a $K(\Phi)$ implica que $\mathbb{H}(K(\Phi)):\mathbb{H}(K(Y))\to\mathbb{H}(K(X))$, por el teorema (2.1.6), los espacios $\mathbf{Char}(X)$, $\mathbf{Char}(Y)$ son homeomorfos a $\mathbb{H}(K(X))$ y $\mathbb{H}(K(Y))$ respectivamente, de donde el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Char}(Y) \arrow[r, "\mathbf{Char}(\Phi)"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathbf{Char}(Y)}"'] & \mathbf{Char}(X) \arrow[d, "\epsilon_{\mathbf{Char}(X)}"] \\
\mathbb{H}(K(Y)) \arrow[r, "\mathbb{H}(K(\Phi))"] & \mathbb{H}(K(X))
\end{tikzcd}$$

es decir $\epsilon_{\mathbf{Char}(X)} \circ \mathbf{Char}(\Phi) = \mathbb{H}(K(\Phi)) \circ \epsilon_{\mathbf{Char}(Y)}$. Sea $\mathfrak{g} \in \mathbf{Char}(Y)$

1	$\big(\epsilon_{\mathbf{Char}(X)} \circ \mathbf{Char}(\Phi)\big)(\mathfrak{g})$	$= \epsilon_{\mathbf{Char}(X)}(\mathbf{Char}(\Phi)(\mathfrak{g}))$	compuesta
		$= \epsilon_{\mathbf{Char}(X)}(\mathfrak{g} \circ \Phi)$	definición de **Char**
		$= \alpha_{\mathfrak{g}\circ\Phi}$	definición de ϵ.
2	$\big(\mathbb{H}(K(\Phi)) \circ \epsilon_{\mathbf{Char}(Y)}\big)(\mathfrak{g})$	$= \mathbb{H}(K(\Phi))(\epsilon_{\mathbf{Char}(Y)}(\mathfrak{g}))$	compuesta
		$= \mathbb{H}(K(\Phi))(\alpha_{\mathfrak{g}})$	definición de ϵ
		$= \alpha_{\mathfrak{g}} \circ K(\Phi)$	definición de $\mathbb{H}$.

Luego

$$\alpha_{\mathfrak{g}\circ\Phi} = \alpha_{\mathfrak{g}} \circ K(\Phi). \tag{3.3}$$

Ahora en la parte izquierda de la ecuación (3.1) se tiene para $\alpha_{\mathfrak{g}} \in \mathbb{H}\big(K(X)\big)$

$$\begin{aligned}
\big(\tau_X^{-1}(x) \circ \mathbb{H}(K(\Phi))\big)(\alpha_{\mathfrak{g}}) &= \tau_X(x)\big(\mathbb{H}(K(\Phi))(\alpha_{\mathfrak{g}})\big) \text{ compuesta} \\
&= \tau_X^{-1}(x)\big(\alpha_{\mathfrak{g}} \circ K(\Phi)\big) \text{ definición de } T, \\
&= \tau_X^{-1}(x)(\alpha_{\mathfrak{h}\circ\Phi}) \text{ por ecuación (3.3)} \\
&= (\mathfrak{g} \circ \Phi)(x) \text{ definición de } \tau^{-1} \\
&= \mathfrak{g}(\Phi(x)).
\end{aligned}$$

de donde se deriva que τ^{-1} es una transformación natural.

Para la biyección de τ^{-1}, citamos el funtor $\mathcal{C}$ de la dualidad de Gelfand [27], que se define de la categoría **Hauss** a la categoría $C^*(\mathbb{C})$,

$$\mathcal{C} : \mathbf{Hauss} \to C^*(\mathbb{C}),$$

donde, $H \in$ **Hauss**, se tiene la $C^*(\mathbb{C})$-álgebra dada por el ejemplo (2.11.2)

$$\mathcal{C}(H) = \{f : H \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ continua}\}$$

y si $\mathcal{X} : H \to G$ es una función continua entre espacios topológicos, $\mathcal{C}(\mathcal{X}) : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(H)$, como $\mathcal{C}(\mathcal{X})(g) = g \circ \mathcal{X}$ para toda $g \in G$. La prueba de que $\mathcal{C}$ es un funtor contravariante es análoga a la del funtor **Char**.

Dada la C^*-álgebras X, Y por el teorema de Gelfand-Naimark, las $C*$-álgebras X, Y son isomorfas a $\mathcal{C}(\mathbf{Char}(X))$, $\mathcal{C}(\mathbf{Char}(Y))$ respectivamente, es decir, se tienen las aplicaciones biyectivas $\wedge_X : X \to \mathcal{C}(\mathbf{Char}(X))$ y $\wedge_Y : Y \to \mathcal{C}(\mathbf{Char}(Y))$, por lo tanto para $\Phi : X \to Y$ un $*$-homomorfismo, el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\wedge_X"'] & Y \arrow[d, "\wedge_Y"] \\
\mathcal{C}(\mathbf{Char}(X)) \arrow[r, "\mathcal{C}(\mathbf{Char}(\Phi))"] & \mathcal{C}(\mathbf{Char}(Y))
\end{tikzcd}$$

Del teorema (2.1.6) los espacios $\mathbf{Char}(X)$ y $\mathbf{Char}(Y)$ son homeomorfos a $\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(X)))$ y $\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(Y)))$ respectivamente, de donde tenemos las aplicaciones biyectivas,

$$\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(i)} : \mathbb{H}\big(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(i))\big) \to \mathbf{Char}(i) \quad \text{con } i = X, Y. \tag{3.4}$$

Aplicando el funtor $\mathcal{C}$ a las funciones descritas en (3.4), se tienen los isomorfismos de álgebras siguientes.

$$\mathcal{C}\big(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(i)}\big) : \mathcal{C}\big(\mathbf{Char}(i)\big) \to \mathcal{C}\Bigg(\mathbb{H}\big(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(i))\big)\Bigg) \quad \text{con } i = X, Y. \tag{3.5}$$

Utilizando la función (3.2) obtenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathbf{Char}(X)) \arrow[r, "\mathcal{C}(\mathbf{Char}(\Phi))"] \arrow[d, "\mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)})"'] & \mathcal{C}(\mathbf{Char}(Y)) \arrow[d, "\mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(Y)})"] \\
\mathcal{C}\big(\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(X)))\big) \arrow[r, "\vartheta"] & \mathcal{C}\big(\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(Y)))\big)
\end{tikzcd}$$

donde $\vartheta = \mathcal{C}(\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(\Phi))))$. Uniendo estos dos últimos diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\wedge_X"'] \arrow[dd, bend right=60, "\rho_X"'] & Y \arrow[d, "\wedge_Y"] \arrow[dd, bend left=60, "\rho_Y"] \\
\mathcal{C}(\mathbf{Char}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)})"] & \mathcal{C}(\mathbf{Char}(Y)) \arrow[d, "\mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(Y)})"'] \\
\begin{array}{c}\mathcal{C}(\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(X)))) \\ TK(X)\end{array} \arrow[r, "TK(\Phi)"'] & \begin{array}{c}\mathcal{C}(\mathbb{H}(\mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(Y)))) \\ TK(Y)\end{array}
\end{tikzcd}$$

Es claro que tanto ρ_X como ρ_Y son biyectivas. Finiquitamos que $\rho_X = \tau_X^{-1}$, en efecto, sea $x \in X$,

$$\begin{aligned}\rho_X(x) &= \big(\mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)}) \circ \wedge_X\big)(x)\\ &= \mathcal{C}(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)})(\wedge_X(x)) \text{ composición}\\ &= \wedge_X(x) \circ \epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)} \text{ definición de } \mathcal{C},\end{aligned}$$

ahora sea $\alpha_{\mathfrak{h}} \in \mathbb{H}(K(X))$,

$$\begin{aligned}\rho_X(x)(\alpha_{\mathfrak{h}}) &= (\wedge_X(x) \circ \epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)})(\alpha_{\mathfrak{h}})\\ &= \wedge_X(x)(\epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)}(\alpha_{\mathfrak{h}})) \text{ composición}\\ &= \wedge_X(x)(\mathfrak{h}) \text{ definición de } \epsilon^{-1}_{\mathbf{Char}(X)}\\ &= \mathfrak{h}(x) \text{ transformada de Gelfand.}\end{aligned}$$

Así, $\rho_X(x) = \tau_X^{-1}(x)$.

Culminamos nuestro trabajo con el teorema de equivalencia dual.

Teorema 3.3.1 (K, T, η, τ) *es una equivalencia dual entre* $MVS[0,1]$ *y* $C^*(\mathbb{C})$.

Demostración. $\eta : 1_{MVS[0,1]} \to K \circ T$ y $\tau : T \circ K \to 1_{C^*(\mathbb{C})}$ son isomorfismos naturales, por tanto las categorías $MVS[0,1]$ y $C^*(\mathbb{C})$ son equivalentes. ■

Mostramos algunos ejemplos de la dualidad obtenida.

Ejemplo 3.1 Sea la MV-álgebra $[0,1]$, aplicando el funtor T, se tiene que

$$T([0,1]) = \{\Phi : \mathbb{H}([0,1]) \to \mathbb{C} \,/\, \Phi \text{ continua}\},$$

por la Proposición (2.1.4) existe una aplicación biyectiva entre $\mathbb{H}[0,1]$ y los ideales maximales de $[0,1]$, además, $\mathcal{M}([0,1]) = \{\{0\}\}$, entonces $\mathbb{H}([0,1]) = \{\alpha_0\}$, es decir, sólo hay un MV-homomorfismo. Con este conjunto definimos el conjunto

$$\mathcal{C}(\mathbb{H}([0,1])) = \{\Phi : \{\alpha_0\} \to \mathbb{C} \,/\, \Phi \text{ continua}\},$$

claramente, las únicas funciones continuas definidas en este conjunto, son las funciones constantes, por tanto $T[0,1] \cong \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.2 Consideremos las álgebras de Lukasiewicz

$$\mathbf{L}_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\},$$

éstas álgebras son subálgebras de $[0,1]$. El único ideal maximal de $\mathbf{L}_n$ es $\{0\}$, por la proposición (2.1.4), $\mathbb{H}(\mathbf{L}_n) = \{\alpha_0\}$, de igual forma que en el caso anterior $T(\mathbf{L}_n) \cong \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.3 Tenemos un resultado de las álgebras C^*, este es:

Proposición 3.3.1 [28] *Todo isomorfismo de C^*-álgebras es un homeomorfismo.*

Sean X, Y dos C^*-álgebras y $\Phi : X \to Y$ un $*$-isomorfismo. Al aplicar el funtor K, se tiene

$$K(\Phi) : K(X) \to K(Y),$$

se sabe que $K(X) = \mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(X))$ y $K(Y) = \mathrm{Cont}(\mathbf{Char}(Y))$, claramente $K(\Phi)$ es un MV-isomorfismo. Además para las MV-álgebras $K(X)$ y $K(Y)$ existen los espacios Hausdorff compactos $\mathbb{H}(K(X))$ y $\mathbb{H}(K(Y))$ dados por la proposición (2.1.5). Asi se tiene la función continua biyectiva

$$\mathbb{H}(K(\Phi)) : \mathbb{H}(K(Y)) \to \mathbb{H}(K(Y)),$$

como $K(\Phi)$ es biyectiva, entonces existe $K(\Phi)^{-1}$, así entonces también existe $\mathbb{H}(K(\Phi)^{-1})$ la cual también es continua, por tanto los espacios $\mathbb{H}(K(X))$ y $\mathbb{H}(K(Y))$ son homeomorfos, por tanto se tiene.

Proposición 3.3.2 *Todo MV-isomorfismo entre MV-álgebras semisimples, inducen un homeomorfismo entre sus espacios espectrales de los MV-morfismos* $[0, 1]$ *valuados, respectivos.*

Conclusiones

- En la introducción se menciona que M. Gelfand en [27] muestra que la categoría de las C^*-álgebras conmutativas con unidad notadas por $C^*(\mathbb{C})$ son dualmente equivalente a los espacios Hausdorff. La proposición (4.2) de [7] establece una equivalencia dual entre la categoría de los espacios Hausdorff y las MV-álgebras de la forma $\mathbf{Cont}(X) = \{f : X \to [0,1] \,/\, f \text{ continua}\}$, con X un espacio Hausdorff compacto denotadas por $MVS[0,1]$. Obtenemos así una equivalencia dual entre la las $C^*(\mathbb{C})$-álgebras y las $MVS[0,1]$ por aplicación del funtor **Char** y $\mathbb{H}$ de modo que los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} C^*(\mathbb{C}) \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "\mathbf{Char}"'] & & MVS[0,1] \\ & \mathbf{Haus} \arrow[ur, "\mathbf{Cont}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} MVS[0,1] \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mathbb{H}"'] & & C^*(\mathbb{C}) \\ & \mathbf{Haus} \arrow[ur, "\mathcal{C}"'] & \end{tikzcd}$$

  Donde los funtores $\mathcal{C}$ y **Cont** envian a cada espacio Hausdorff compacto X al conjunto de álgebras

  $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ continua}\}$ y $\mathbf{Cont}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ continua}\}$, respectivamente.

  La dualidad que se ha obtenido en este trabajo, muestra que para el caso de MV-álgebras semisimples es posible pasarlas en términos de C^*-álgebras conmutativas con unidad y viseversa. Para un futuro estudio se podría pensar la posibilidad de representar MV-álgebras más generales. Esta representación se dificulta para el caso de C^*-álgebras no conmutativas, dado que los espacios involucrados para éstas son localmente compactos y para este tipo de espacios no tenemos una equivalencia que nos permita estudiar una posible representación.

- En la construcción de la dualidad, fue necesario estudiar en detalle las dualidades existentes, las topologías involucradas y abordar la teoría necesaria para establecer la equivalencia como aporte a la literatura especializada, dado que no hay ninguna prueba en las referencias usadas.

- Sea X un espacio normado y X^* su dual, en el estudio de la topología $*$-débil de X, denotado por $\sigma(X^*, X)$ como la topología de X^*, para los elementos de X, por tanto es la menor topología en X^* que hace continua los elementos de X. Ahora para una MV-álgebra, se dota la topología de la convergencia puntual, estudiada en la sección (2.1.3), siendo esta la topología producto la cual es la menos fina que hace continua todas las proyecciones (proposición (2.1.3)). Se puede observar que la topología de Gelfand, por la dualidad obtenida no es otra cosa que la topología de convergencia puntual.

Bibliografía

[1] ARVERSON, W. (1981) *An invitation to C^*-Algebras.* Springer-Verlag.

[2] ATIYAH M.F, MacDONALD L.G. (1969) *Introduction to commutative algebra.* Addson-Wesley Publishing Company.

[3] AWODEY, S. (2006) *Category Theory*, Clarendon Press Oxford.

[4] BURRIS, S., SANKAPPANAVAR, H. (2000) *A Course in Universal Algebra.* The Millennium Edition.

[5] CHANG, C.C. (1958) *Algebraic analisys of many-valued logics*, TRASNSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 88 p.467 – 490.

[6] CIGNOLI, R., D'OTTAVIANO, I.L., MUNDICI, D. (2013) *Algebraic Foundations of Many-Valued reasoning*; Springer: Berlin Heidelberg, New York.

[7] CIGNOLI R, DUBUC J, MUNDICI D. (2004) *Extending Stone duality to multisets an locally finite MV-algebras*, JOURNAL OF PURE AND APPLIED 189, 37-59. 2, 24, 34, 35

[8] CIGNOLI R, MUNDICI D. (1998) *An Elementary Presentation of the Equivalence Between MV-algebras and l-groups With Strong Unit*, STUDIA LOGICA 61 49-64.

[9] CONMWAY, J. (1997) *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer.

[10] DIEUDONNÉ, J. (1982) *Elementos de Análisis*, Tomo II. Editorial Reverté S.A.

[11] DUBUC, E.J., POVEDA,Y. (2009) *Representation theory of MV-algebras*; Annals of Pure and Applied Logic.

[12] ERDOS, J.A. (1971) C^*-*Algebras*, Department of Mathematics, King's College. London, England.

[13] GELFAND, I. (1941) *Idelae und primare Idelaes in normierten Ringer*; Mat. Sbornik. NS 9(51), 41-48.

[14] GELFAND, I., NAIMARK, m. (1943) *On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbet space*; Math Sburnik. 12(2): 197-217.

[15] LEINSTER, T. (2014) *Basic Category Theory*; Cambridge studies in advanced matematics, 143. Editorial Board.

[16] LUKASIEWICZ, J. (1920) *On three-valued logic*; English translation in L. Borkowski (ed.), Selected works by Jan Lukasiewicz, North Holland, Amsterdam, 1970.

[17] MACLANE, S. (1998) *Categories for Working Mathematician.* 2nd ed, Springer.

[18] MULVEY, C. (1978) *A Generalisation of Gelfand Duality.* Departament of Mathematics, Columbia University, New York.

[19] MURPHY, G. J. (1990) *C-Algebras and operator theory.* Academic Press, San Diego.

[20] KHALKHALI, M. (2009) Basic Noncommutative Geometry, European Mathematical Society.

[21] KELLEY, J. L. (1975) *General Topology.* Springer, Berlin Heidelbert, New York.

[22] PEÑA, C. (2012) *Una dualidad uniforme para MV-álgebras semisimples*, Msc. Thesis, Universidad del Valle.

[23] PRIESTLEY, H.A, (1970) *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces Bull.* London Math. Soc 2, 189-190.

[24] PÉREZ, R. (2013) *Sobre las Funciones de p-variación acotada*, Universidad de la Habana.

[25] POVEDA, Y. (2007) *Una teoría general de representaciones para MV-álgebras*, Buenos Aires, Argentina.

[26] POVEDA, Y., ALIRIO, E. (2010) *El espectro primo de las MV-álgebras*, Scientia Et Technica [en linea] 2010, XVI (Agosto).

[27] RICKARK, C.E. (1960) *General Theory of Banach algebras*, Van Nostrand.

[28] RUDIN, W. (1991) *Functional Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill.

[29] STOJANOFF, D. (2011) *Un curso de Análisis Funcional.* Buenos Aires.

[30] VARELA, J. (1974) *Álgebras de Banach - La teoría de Gelfand.* Bolletin de Matemtiticas Vol. Vll, pp. 1-20, Universidad Nacional de Colombia.